الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مجموعة مواضيع وحلولها من الثلاثي الثاني
لمـــادة الريـــاضيـــات
لجميع الشعب

الموسم الدراسي 2007 / 2008

كلمة افتتاحية

يشرّف مديرية التّعليم الثّانوي التّقني بوزارة التّربية الوطنيّة، والديّوان الوطني للمطبوعات المدرسيّة أن يُصدرا مجموعة من المواضيع في شكل حوليّات للسّنة الثّالثة ثانوي من السّنة الدّراسيّة الحاليّة بعد دراستها ومعالجتها .

نأمل أن تكون هذه المواضيع سندا إيجابيا ودعما قويًا لأبنائنا التّلاميذ المقبلين على امتحان شهادة البكالوريا .

أخيرا، نتقدّم بجزيل الشّكر لكل الأساتذة الّذين أنجزوا هذه المواضيع ولكلّ الّذين ساهموا من قريب أو من بعيد في هذه العمليّة الّتي نعتبرها خدمة نبيلة للمنظومة التّربويّة .

الموضوع رقم : **01**

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10.
2. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 10 للعدد $63\times9^{2001}-7^{1422}$.
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv(n-1)\times3^{2n+1}[10]$.
4. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv0\,[10]$.

التمرين الثاني:

أ) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: (E)..... $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$.

1. برهن أن العدد المركب i حل للمعادلة (E).
2. عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$$

3. استنتج حلول المعادلة (E)

ب) نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C ذات اللاحقات $z_A=i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=2-3i$ على الترتيب.

1. ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته $\frac{\pi}{4}$. عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r.
2. برهن أن النقط A'، B و C في استقامية ثم عين الكتابة المركبة للتحاكي ذو المركز B و الذي يحول النقطة C إلى A'.

التمرين الثالث:

أ) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=\frac{1}{2}\left[x+(1-x)e^{2x}\right]$.

ليكن C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحى C_f بجوار $-\infty$.

أدرس وضعية C_f بالنسبة لــ(Δ).

3. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $g(x)=1+(1-2x)e^{2x}$.

أدرس تغيرات الدالة g. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,6;0,7]$.
استنتج إشارة $g(x)$.

4. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.
5. احسب $f\left(\frac{3}{2}\right)$، $f(-1)$ و $f(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty;-1]$.
6. أنشئ المنحني C_f.

ب) لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty;-1]$ بحيث : $f(1)=\frac{1}{4}$.

1. برر و جود الدالة F.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة F على المجال $]-\infty;-1]$.

الموضوع رقم : **02**

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180.
2. حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $225x-180y=90 \quad ....(1)$.
3. عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x-y+1|<2$.
4. a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ و $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس α، و يكتبان $\overline{44}$ و $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس β.

عين α و β ثم اكتب a و b في النظام العشري.

التمرين الثاني:

أ) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(1;0;2)$، $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$.

1. بين أن النقط A، B و C ليست على استقامة واحدة.
2. ليكن الشعاع $\vec{n}=3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. بين أن $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
3. استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

ب) t عدد حقيقي موجب تماما. نعتبر النقطتين I و G حيث:

I مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2)\}$ و G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$.

1. جد إحداثيتي النقطة I ثم عبر عن الشعاع $\overrightarrow{IG}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{IC}$.
2. بين أنه لما يمسح t المجموعة $\mathbb{R}^*_+$، النقطة G تنتمي إلى القطعة $[IC]$ باستثناء النقطتين I و C.
3. من أجل أي قيمة للوسيط t تنطبق النقطة G على منتصف القطعة $[IC]$.

التمرين الثالث:

أ) g هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=x+e^{2(x-1)}\ .$$

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha\in\left[-\frac{1}{5},-\frac{1}{10}\right]$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

$$f(x)=x^2+e^{2(x-1)} .$$

ليكن C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $5cm$).

1. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=2g(x)$. ثم ادرس تغيرات الدالة f .
2. بين أن: $f(\alpha)=\alpha^2-\alpha$. ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
3. * احسب : $f(-1)$، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f(1)$.
   * اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى C_f في النقطة ذات الفاصلة 1.
   * ارسم (Δ) و C_f في نفس المعلم السابق.
4. احسب بالسنتمتر المربع a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى C_f والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=2$ و $y=0$.

الموضوع رقم : 03

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. عين $p\gcd(2688;3024)$.
2. أ) تحقق أن المعادلتين (1) $2688x+3024y=-3360$ و (2) $8x+9y=-10$ متكافئتان حيث x و y عددان صحيحان.

ب) تحقق أن $(1;-2)$ حل خاص للمعادلة (2).

3. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستويين (P) و (P') اللذين معادلتاهما على الترتيب:

$$(P):x+2y-z=-2 \quad \text{و} \quad (P'):3x-y+5z=0.$$

أ) بين أن المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d).

ب) بين أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2).ثم استنتج (E) مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

التمرين الثاني:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. نأخذ كوحدة للأطوال $5cm$.

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=\frac{1}{2}(1+i)z+1$$

1. برر أن f تشابه مباشر يطلب تعيين مركزه Ω ذو اللاحقة ω، نسبته k و زاويته θ .
2. نسمي A_0 النقطة O و من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $A_{n+1}=f(A_n)$.

أ) عين لاحقات النقط A_1 ، A_2 ، A_3 ثم علم النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 .

ب) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $u_n=\Omega A_n$.

بين أن المتتالية (u_n) هندسية ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n .$$

ج) ابتداء من أي رتبة n_0 تنتمي كل النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره $0,1$؟

3. أ) ما هي نوعية المثلث ΩA_0A_1؟ استنتج من أجل كل عدد طبيعي n، نوعية المثلث ΩA_nA_{n+1} .

ب) من أجل كل عدد طبيعي n، نرمز بالرمز l_n إلى طول الخط المنكسر $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$. و عليه:

$l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$.

عبر عن l_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} l_n$.

<u>التمرين الثالث:</u>

أ) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

$$f(x) = e^x - (3x+1)$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس حسب قيم العدد الحقيقي x، إشارة $e^x - 3$.
2. بين أن المنحني (C_f) يمر من النقطة O و يقطع محور الفواصل في نقطة ثانية A فاصلتها α حيث: $\frac{5}{4} < \alpha < 2$.
3. عين نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
4. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
5. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y = -3x - 1$ بجوار $-\infty$. حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).
6. ارسم كلا من (Δ) و (C_f).

ب) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

$$g(x) = e^x - \frac{3}{2}x^2 - x + 1.$$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن g هي الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $g(0) = 2$.
2. بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = 2$ مماسا للمنحني (C_g) في نقطة منه يطلب تعيينها.
3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا x_0 في المجال $\left]-\frac{3}{2};-1\right[$.
4. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
5. ارسم المنحني (C_g) (نأخذ $g(\alpha) \approx 0,20$).

الموضوع رقم : **04**

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$(1+i)z^2-2z+1-i=0$$

2. ليكن m عدد مركب طويلته $\sqrt{2}$.

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z حيث: (E) .... $mz^2-2z+\overline{m}=0$.

[يرمز $\overline{m}$ إلى مرافق العدد المركب m].

3. نضع الآن: $m=\sqrt{2}\cdot e^{i\alpha}$ حيث α عدد حقيقي.

أ) أثبت أن z_1 ؛ z_2 حلول المعادلة (E) تكتب كما يأتي: $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ ؛ $z_2=e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

ب) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط M_1 ؛ M_2 و M ذات اللاحقات z_1 ؛ z_2 و $\left(z_1+z_2\right)$ علي الترتيب.

* أثبت أن: $\dfrac{z_1}{z_2}=i$ و استنتج أن الشعاعين $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{OM_2}$ متعامدان.

* أثبت أن الرباعي OM_1MM_2 مربع.

التمرين الثاني:

أ) نعتبر كثير الحدود $P(x)$ للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x)=2x^3+x^2-13x+6$.

1. تحقق أن $x=2$ حل للمعادلة: $P(x)=0$ ثم عين مجموعة حلولها.
2. حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلتين ذات المجهول x الآتيتين:

- $2(\ln x)^3+(\ln x)^2-13\ln x+6=0$.
- $6e^{-3x}+e^{-x}-13e^{-2x}+2=0$.

ب) لتكن الأعداد الحقيقية الموجبة تماما a ؛ b ؛ c وحدود متعاقبة من متتالية هندسية .

1. بين أن الأعداد $\ln a$ ؛ $\ln b$ ؛ $\ln c$ بهذا الترتيب حدود متعاقبة من متتالية حسابية.
2. أحسب الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c علما أن: $\begin{cases}\ln abc=21\\(\ln a)(\ln b)(\ln c)=-105\end{cases}$.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يأتي:

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن f دالة فردية ثم عين نهاياتها عند كل من 0، $-\infty$ و $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]1;2[$.
4. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ_1) و (Δ_2) معادلتاهما $y = x + 1$ و $y = x - 1$ على الترتيب.
5. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لكل من (Δ_1) و (Δ_2). ثم أنشئ (Δ_1)، (Δ_2) و (C_f).

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

الموضوع رقم : 05

التمرين الأول:

أ) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $z^2-(3+i)z+4=0$ .....(E)

1. عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8+6i$.
2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).نرمز إلى الحلين بــ z_1 و z_2 حيث: $|z_1|<|z_2|$.

ب) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب i، z_1 و z_2.

1. عين الصيغة المركبة للدوران R الذي مركزه A و يحقق $R(B)=C$.
2. حدد زاوية الدوران R.
3. استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين الثاني:

نعتبر المعادلة التفاضلية الآتية: $4y''+y=0$.

1. عين الحل العام y للمعادلة
2. عين الحل الخاص f الذي يحقق $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ و $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$.

التمرين الثالث:

أ) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $g(x)=-4+(4-2x)e^x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. اوجد معادلة المماس لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة 0.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.59<\alpha<1.60$.

تحقق أن $e^{\alpha}=\frac{2}{2-\alpha}$. استنتج إشارة $g(x)$.

ب) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=\frac{2x-2}{e^x-2x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الطول هي $2cm$.

و لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $h(x)=e^x-2x$.

1. أ درس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$.
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.
3. ادرس تغيرات الدالة f. حدد المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f).

4. بين أن $f(\alpha)=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5. احسب $f(-2)$ ، $f(-1)$ و $f(2)$ ثم ارسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).

ج) نعتبر الدالة العددية T المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $T(x)=-x+\ln\left(e^x-2x\right)$.

1. بين أن الدالة T قابلة للاشتقاق واحسب دالتها المشتقة الأولى T'.
2. استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $\mathbb{R}$.

الموضوع رقم : 06

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

من أجل كل عدد مركب يختلف عن $-1+i$، نضع: $f(z)=\frac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z=x+iy$.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم ومتعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $-1+i$ ، $\frac{1}{2}i$ و $-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$.

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f\left(\bar{z}\right)=-2$.

2- حدد $\text{Re}\left(f(z)\right)$ و $\text{Im}(f(z))$ بدلالة x و y.

3- حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون: $f(z)$ حقيقيا.

4- حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون: $\left|f(z)\right|=2$.

5- بين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في النقطة C.

التمرين الثاني:

1. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left]-1;+\infty\right[$ كما يأتي: $f(x)=\ln(x+1)$.

بين أن f متزايدة تماما.

2. (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يأتي: $\begin{cases} u_0=e \\ u_{n+1}=\ln(1+u_n) \end{cases}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$.

3. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $\left]-1;+\infty\right[$ كما يأتي: $g(x)=\ln(x+1)-x$.

ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم حدد إشارة $g(x)$. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة.

4. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

التمرين الثالث:

أ) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي : $h(x)=(x-1)e^{-x}+2$.

1. ادرس تغيرات الدالة h.

2. بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-0.38;-0.37\right[$.

3. استنتج إشارة $h(x)$.

ب) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$).

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=h(x)$.

2. ادرس تغيرات الدالة f.

3. بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

4. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

5. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف.

6. بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

7. ارسم المستقيم المقارب (d) والمنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\approx-0.375$).

ج) (Δ_β)مستقيم معادلته $y=2x+\beta$ حيث β عدد حقيقي.

1- عين βحتى يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقيβ عدد حلول المعادلة التالية: $\dfrac{x}{e^x}+1-\beta=0$.

الموضوع رقم : 07

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

أ) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود التالي:

$$P(z)=z^3-(5+i)z^2+(10+6i)z-8-16i\ .$$

4. بين أن $P(z)$ يقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.
5. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.
6. نضع: $z_0=2i$ ، $z_1=2-2i$ و $z_2=3+i$.

*اكتب z_0 و z_1 على الشكل المثلثي و الشكل الأسي.

*اكتب العددين $\left(\frac{z_0}{2}\right)^{1429}$ و $\left(\frac{z_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2008}$ على الشكل الجبري.

ب) نضع: $\alpha=\dfrac{z_2-2+(\sqrt{3}-1)i}{z_1}$

1. عين طويلة وعمدة العدد المركب α .
2. أكتب α على الشكل الجبري ، واستنتج كلا من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

التمرين الثاني:

أ) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n=e^{-\frac{1}{3}+2n}$

1. بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
2. احسب المجموعين: $S_1=u_0+u_1+.....+u_n$ و $S_2={u_0}^2+{u_1}^2+.......+{u_n}^2$.
3. عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_1=\dfrac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{10}\right)$.

ب) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $v_n=\ln(u_n)$.

1. ما هي طبيعة المتتالية (v_n)؟
2. احسب بدلالة n المجموع S' حيث: $S'=v_0+v_1+.......+v_n$.
3. عين العدد الطبيعي n علما أن: $S'=\dfrac{160}{3}$.

التمرين الثالث:

أ) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

$$g(x)=(3-2x)e^x+2$$

1. احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\alpha\in\left]1,68;1,69\right[$.
4. استنتج إشارة $g\left(x\right)$ من أجل كل عدد حقيقي x.

ب) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

$$f(x)=\frac{e^x+4x-1}{e^x+1}.$$

و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $\left(C_f\right)$؟
2. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+1)^2}$.
3. بين أن: $f(\alpha)=4\alpha-5$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.
4. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
5. بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ذو المعادلة $y=4x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$.
6. أدرس وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$بالنسبة للمستقيم $\left(\Delta\right)$.
7. أكتب معادلة المماس $\left(T\right)$ للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.
8. ارسم كلا من $\left(T\right)$ ، $\left(\Delta\right)$ و $\left(C_f\right)$.
9. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$me^x-4x+m+2=0.$$

الموضوع رقم : **08**

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

1. f دالة معرفة كما يأتي: $f(x)=x+1+2[\ln x-\ln(x-1)]$.
   - f دالة معرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
   - منحني f يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ كمستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.
2. f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يأتي: $f\left(x\right)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$.
   - f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g\left(x\right)=x^2+2-2\ln x$
   - على $]0;+\infty[$ إشارة g' هي من نفس إشارة x^2-1 .
   - على $]0;+\infty[$ الدالة g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3.
   - الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

التمرين الثاني:

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $U_3=24$ و $U_5=96$.

1. اكتب عبارة U_n بدلالة n.
2. احسب بدلالة n المجموع : $S_n=U_0+U_1+....+U_n$.
3. عين قيمة n التي يكون من أجلها المجموع : $S_n=381$.
4. نضع : $P_n=U_1\times U_2\times...\times U_n$. احسب P_n بدلالة n.

التمرين الثالث:

عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الحقيقية التي تحقق: $\begin{cases} x^2+2y=16 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=-\ln(3) \end{cases}$.

التمرين الرابع:

أ) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يأتي: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\ln x$ و ليكن (C) تمثيلها البياني

في معلم متعامد متجانس $(O;I,J)$.

1. عين نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α ثم تحقق أن $1<\alpha<2$.

4. ليكن (Δ) مماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 1.

*عين معادلة للمماس (Δ) و أكتبها على الشكل: $y = ax + b$.

*أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ $g(x) = f(x) - (ax + b)$.

*استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المماس (Δ).

5. ارسم كلا من المماس (Δ) و المنحني (C).

6. بين أن الدالة: $x \to x\ln(x) - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \ln(x)$ على $]0;+\infty[$.

7. احسب بدلالة α، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = \alpha$. ثم بين أن: $A(\alpha) = \dfrac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} \ u.a$.

الموضوع رقم: 09

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

يحتوي كيس U على 4 قريصات بيضاء و 3 سوداء و يحتوي كيس آخر U' على 17 قريصة بيضاء و 18 قريصة سوداء لا نفرق بينها عند اللمس. نرمي زهرة نرد متجانسة أوجهها مرقمة من1إلى6. فإذا ظهر الرقم 6 نسحب قريصة من الكيس U وإلا نسحب قريصة من الكيس U'.

1. برهن أن احتمال سحب قريصة بيضاء هو $0,5$.
2. إذا سحبنا قريصة بيضاء، فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الكيس U.

التمرين الثاني: المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=e^{2x}-3e^{x}+x+2$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم السابق (الوحدة $4cm$).

1. أ) عين نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$.

ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C).

جـ) ادرس وضع المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D).

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x)=e^{x}\left(e^{x}-3+\frac{x}{e^{x}}+\frac{2}{e^{x}}\right)$ ثم استنتج نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$.

2. أ) احسب $f'(x)$ ثم تحقق أن : $f'(x)=(2e^{x}-1)(e^{x}-1)$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x)=0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$. ماذا يمكن أن نقول عن المستقيمين (T) و (D)؟

ب) أنشئ (T) و (D) و (C) في نفس المعلم.

احسب بالسنتمتر المربع (cm^2) المساحة S للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\ln 3$.

التمرين الثالث: من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $I_n=\int_{n}^{n+1}2e^{-2x}dx$

1. أ) احسب I_0.

ب)عبر عن I_n بدلالة n.

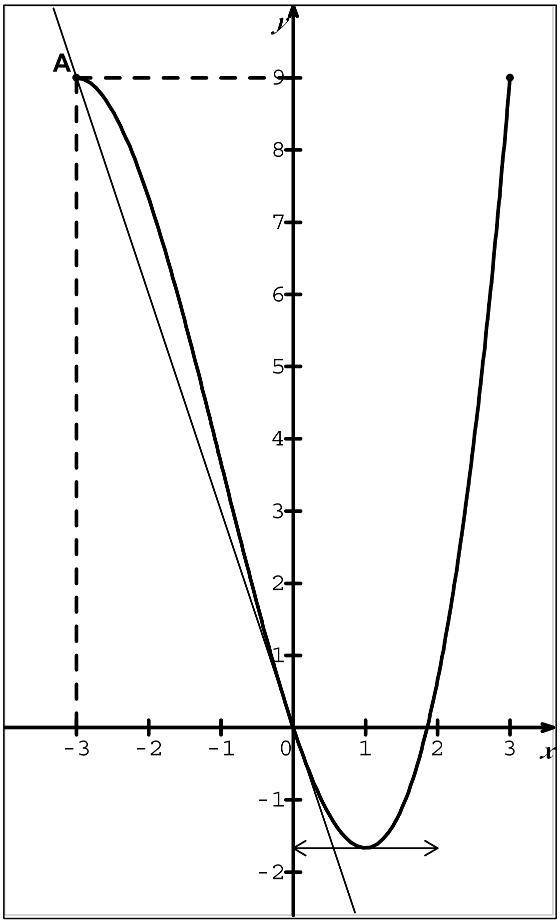
2. أ) اثبت أن (I_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب) عين نهاية I_n عندما ينتهي n إلى $+\infty$.

الموضوع رقم : **10**

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:



الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد متجانس $(O;I,J)$ حيث:

* يمر (C) بمبدأ المعلم O ويشمل النقطة $A(-3;9)$.

* يقبل (C) في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا.

ويقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O.

1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA)؟
2. عين اتجاه تغير الدالة f.
3. حل بيانيا في المجال $[-3;3]$ المتراجحة: $f(x) \geq -2$.
4. نفرض أن: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث a، b، c و d أعداد حقيقية.
   بين أن: $a = \frac{1}{3}$، $b = 1$ ، $c = -3$ و $d = 0$.

التمرين الثاني:

يمثل الجدول الموالي تطور رصيد إحدى الشركات مقدرا بملايين الدنانير بين سنتي 2001 و 2007:

السنة	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
رتبة السنة x_i	0	1	2	3	4	5	6
الرصيد y_i بملايين الدنانير	20.4	24.2	33.8	38.6	49	53.9	59.29

1. مثل في معلم متعامد مختار بعناية سحابة النقط $(x_i;y_i)$ ثم اشرح لماذا يمكن إجراء تعديلا خطيا.
2. عين إحداثيات النقطة المتوسطة G ثم مثلها.
3. عين معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا ثم مثله.
4. باستعمال التعديل الخطي السابق، كم يكون رصيد هذه الشركة في سنة 2010 ؟

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O;I,J\right)$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$. ماذا تستنتج ؟

2. لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ بحيث : $F\left(0\right)=0$.

أ) برر وجود الدالة F على المجال $[0;+\infty[$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة F على المجال $[0;+\infty[$.

3. نعتبر الدالتين H و K المعرفتين على المجال $[0;+\infty[$ كما يأتي:

$$H\left(x\right)=F\left(x\right)-x \quad \text{و} \quad K\left(x\right)=F\left(x\right)-\frac{2}{3}x .$$

ادرس اتجاه تغير الدالتين H و K على $[0;+\infty[$ ثم بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $F(x)\geq\frac{2}{3}x$.

استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.

الموضوع رقم : **11**

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 4^n على 7.
2. عين باقي قسمة مل من 4^{2008} و 4^{1428} على 7.
3. بين أن: $4^{2008}+4^{1428}+16\equiv 0\,[7]$.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يأتي:

$u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2u_n+1$.

1. برهن بالتراجع أن كل حدود المتتالية (u_n) موجبة.
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يأتي: $v_n=u_n+1$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول و أساسها.

ب) عين عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3. احسب بدلالة n المجموعين: $S_n=v_0+v_1+...+v_{10}$ و $S'_n=u_0+u_1+...+u_{10}$.

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم كما يأتي:

$u_1=0$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=u_n+2n-1$.

1. احسب الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية. ضع تخمينا حول عبارة u_n بدلالة n.
2. برهن بالتراجع صحة تخمينك.
3. عين قيمة كل من الحدين u_{2008} و u_{1429}.

الموضوع رقم : **01**

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. لدينا: $3^0\equiv 1[10]$ ، $3^1\equiv 3[10]$ ، $3^2\equiv 9[10]$ ، $3^3\equiv 7[10]$ و $3^4\equiv 1[10]$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا:

$3^{4k}\equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1}\equiv 3[10]$ ، $3^{4k+2}\equiv 9[10]$ و $3^{4k+3}\equiv 7[10]$.

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k\in\mathbb{N}$
$3^n\equiv$	1	3	9	7	$[10]$

2. لدينا: $63\equiv 3[10]$ و بما أن $9\equiv -1[10]$ فإن $9^{2001}\equiv -1[10]$ و عليه $63\times 9^{2001}\equiv -3[10]$.

نلاحظ أن $7\equiv -3[10]$ و منه $7^{1422}\equiv(-3)^{1422}[10]$ أي $7^{1422}\equiv 3^{1422}[10]$.

و بما أن $1422=4\times 355+2$ فإن $3^{1422}\equiv 9[10]$ أي $7^{1422}\equiv 9[10]$.

لدينا هكذا $63\times 9^{2001}-7^{1422}\equiv -12[10]$ أي $63\times 9^{2001}-7^{1422}\equiv 8[10]$.

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $63\times 9^{2001}-7^{1422}$ على 10 هو 8.

3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $3n\times 9^n+7^{2n+1}\equiv(n-1)\times 3^{2n+1}[10]$

لدينا:

$$\begin{aligned}3n\times 9^n+7^{2n+1}&\equiv 3n\times\left(3^2\right)^n+(-3)^{2n+1}[10]\\&\equiv n\times 3^{2n+1}-3^{2n+1}[10]\\&\equiv(n-1)\times 3^{2n+1}[10]\end{aligned}$$

.

4. تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $3n\times 9^n+7^{2n+1}\equiv 0[10]$.

$3n\times 9^n+7^{2n+1}\equiv 0[10]$ يعني $(n-1)\times 3^{2n+1}\equiv 0[10]$.

لدينا: $3^{2n+1}=3\times 3^{2n}=3\times 9^n$ و بما أن $9\equiv -1[10]$ فإن $9^n\equiv(-1)^n[10]$. إذن $3^{2n+1}\equiv 3(-1)^n[10]$

لدينا هكذا: $(n-1)\times 3^{2n+1}\equiv 3(-1)^n(n-1)[10]$ و عليه:

$(n-1)\times 3^{2n+1}\equiv 0[10]$ يعني $3(-1)^n(n-1)\equiv 0[10]$.

بما أن $3(-1)^n\equiv 3[10]$ أو $3(-1)^n\equiv -3[10]$ فإن: $3(-1)^n(n-1)\equiv 0[10]$ يعني $n-1\equiv 0[10]$.

يكون $3n\times 9^n+7^{2n+1}\equiv 0[10]$ من أجل $n\equiv 1[10]$ أي $n=10\alpha+1$ مع α عدد طبيعي.

التمرين الثاني:

1. لدينا: $i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=-i+4+i+13i-4-13i=0$

إذن العدد المركب i حل للمعادلة (E).

2. تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)\left(az^2+bz+c\right)$$

لدينا: $(z-i)(az^2+bz+c)=az^3+(b-ai)z^2+(c-bi)z-ci$.

بالمطابقة ينتج: $\begin{cases} a=1 \\ b-ai=-4-i \\ c-bi=13+4i \\ ci=13i \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=13 \end{cases}$. نستنتج هكذا أنه من أجل كل عدد مركب z:

$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i).(z^2-4z+13)$.

3. استنتاج حلول المعادلة (E):

(E) تكافئ $z=i$ أو $z^2-4z+13=0$

نحل المعادلة : (1) ... $z^2-4z+13=0$.

لدينا: $\Delta=-36=(6i)^2$

حلا المعادلة (1) هما إذن: $2-3i$ و $2+3i$

مجموعة حلول المعادلة(E) هي : $\{i;2-3i;2+3i\}$.

ب) r هو الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

1. عبارته في المستوي المركب هي: $z'-z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_B)$ أي: $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)z_B$

و منه: $z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z+\frac{4+\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right)$.

لدينا: $z_{A'}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i+\frac{4+\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right)$ و منه: $z_{A'}=2+\left(3-2\sqrt{2}\right)i$.

2. فعلا النقط A' ، B و C في استقامية لأن لها نفس الفاصلة 2.

ليكن h التحاكي الذي مركزه B و الذي يحول النقطة C إلى A'. بفرض k نسبة التحاكي h تكون الكتابة المركبة للتحاكي h هي: $z'-z_B=k(z-z_B)$. و بما أن $h(C)=A'$ فإن: $z_{A'}-z_B=k(z_C-z_B)$

و منه: $k=\frac{z_{A'}-z_B}{z_C-z_B}$ و بعد إنجاز مختلف الحسابات نحصل على: $k=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

و منه الكتابة المركبة للتحاكي h هي: $z'=\frac{\sqrt{2}}{3}(z-2-3i)+2+3i$.

التمرين الثالث:

أ) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=\frac{1}{2}\left[x+(1-x)e^{2x}\right]$.

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}\left[1+\frac{e^{2x}}{x}-e^{2x}\right]=-\infty$ و $f(x)=\frac{1}{2}x\left[1+\frac{(1-x)}{x}e^{2x}\right]=-\infty$.

2. لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left[(1-x)e^{2x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left[e^{2x}-\frac{2x.e^{2x}}{2}\right]=0$.

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحى C_f بجوار $-\infty$.

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى (Δ) ندرس حسب قيم x إشارة الفرق $f(x)-y$.

لدينا: $f(x)-y=\frac{1}{2}(1-x).e^{2x}$ و منه فإشارة $f(x)-y$ من نفس إشارة $1-x$ لأن $e^{2x}>0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$
الوضعية	C_f فوق (Δ)		C_f تحت (Δ)

3. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $g(x)=1+(1-2x)e^{2x}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{2x}-2xe^{2x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+(1-2x)e^{2x}\right)=-\infty$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $g'(x)=-4xe^{2x}$.

إشارة $g'(x)$ هي إذن عكس إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	2	↘ $-\infty$

نلاحظ أن المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حلولا في المجال $]-\infty;0]$ لأن العدد 0 ليس عنصرا من $]1;2]$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2]$ و $0\in]-\infty;2]$ ،

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.

و بالإضافة إلى ذلك لدينا: $g(0,6)\approx 0,33$ و $g(0,7)\approx -0,62$ أي أن $g(0,6)\times g(0,7)<0$.

و هكذا فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,6;0,7]$.

نستنتج هكذا إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

4. دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2}\left[1+(1-2x)e^{2x}\right]$ أي $f'(x)=\frac{1}{2}g(x)$.

إذن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g'(x)$ و عليه جدول تغيرات f هو كالآتي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

بما أن $0,6 \le \alpha \le 0,7$ فإن $\frac{0,6+0,3e^{1,2}}{2} < f(\alpha) < \frac{0,7+0,4e^{1,4}}{2}$

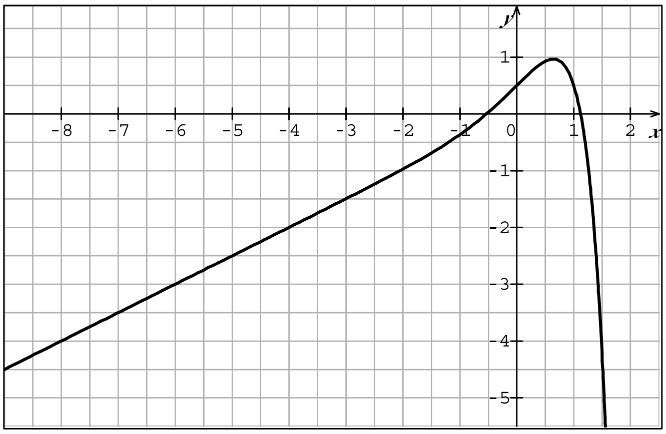
و هكذا نجد أن: $0,79 < f(\alpha) < 1,16$.

5. حساب $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، $f(-1)$ و $f(1)$ استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty;-1]$.

$f(-1) \simeq -0,36$ ، $f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq -4,27$ ، $f(1)=\frac{1}{2}$.

نستنتج هكذا أنه من أجل كل x من $]-\infty;-1]$ ، $f(x)<0$ لأن $f(x)<f(-1)$ على $]-\infty;-1]$ ما دام الدالة f متناقصة تماما على هذا المجال.

6. رسم المنحني C_f:



ب) لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty;-1]$ بحيث : $F(1)=\frac{1}{4}$.

1. بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;-1]$ فهي إذن مستمرة على هذا المجال و بالتالي فهي تقبل دالة أصلية وحيدة F تحقق $F(1)=\frac{1}{4}$.

2. من أجل كل x من $]-\infty;-1]$، $F'(x)=f(x)$ و بما أن من أجل كل x من $]-\infty;-1]$، $f(x)<0$ فإن الدالة F متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.

الموضوع رقم : **02**

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. بإتباع خوارزمية إقليدس مثلا نحصل على الجدول الآتي:

الحاصل		1	4
القاسم و المقسوم	225	180	45
الباقي		45	0

و هكذا فإن $PGCD(225;180)=45$.

2. لدينا: (1).... $225x-180y=90$ و بما أن $PGCD(225;180)=45$ فإن المعادلة (1) تكافئ المعادلة (2).... $5x-4y=2$.

نلاحظ أن الثنائية $(2;2)$ حل خاص للمعادلة (2).

لدينا إذن: $\begin{cases} 5x-4y=2 \\ 5(2)-4(2)=2 \end{cases}$. بالطرح ينتج: $5(x-2)=4(y-2)$.

لدينا: 4 يقسم $5(x-2)$ و $PGCD(4;5)=1$ فإن حسب مبرهنة غوص 4 يقسم $(x-2)$.

نستنتج هكذا أن: $x-2=4k$ حيث k عدد صحيح.

بالتعويض نجد: $y-2=5k$.

نستنتج أن الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة بحيث: $\begin{cases} x=4k+2 \\ y=5k+2 \end{cases}$ و k عدد صحيح.

3. تعيين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x-y+1|<2$.

$|y-x+1|<2$ يعني $|-k+1|<2$ أي $-2<k-1<2$ ومنه $-1<k<3$.

و هكذا فإن $k\in\{0;1;2\}$ ومنه مجوعة الحلول هي: $S=\{(2;2);(6;7);(10;12)\}$.

4. لدينا: $\begin{cases} a=2+5\alpha \\ a=4+4\beta \end{cases}$ و لدينا: $\begin{cases} b=2+5\alpha+2\alpha^2 \\ a=6+2\beta^2 \end{cases}$.

و منه: $\begin{cases} 5\alpha-4\beta=2 \\ 2\alpha^2-2\beta^2+5\alpha-4=0 \end{cases}$ بدون ما ننسى أن $\alpha>5$ و $\beta>6$.

بما أن $5\alpha-4\beta=2$ لدينا حسب السؤال2: $\begin{cases} \alpha=4k+2 \\ \beta=5k+2 \end{cases}$ و k عدد طبيعي.

و منه و بالتعويض في العلاقة الثانية نحصل على: $2(4k+2)^2-2(5k+2)^2+5(4k+2)-4=0$.

بعد إجراء الحسابات نجد: $3k^2-2k-1=0$ و علما أن k عدد طبيعي فإن $k=1$. ثم بالتعويض نجد: $\alpha=6$ و $\beta=7$.

بالتعويض نجد $a=32$ و $b=104$.

التمرين الثاني:

أ) لدينا النقط: $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$.

1. لدينا $\overrightarrow{AB}(0;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$.

النقط A ، B و C على استقامة واحدة معناه يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ يعني $\begin{cases}0=-2k\\1=k\\2=-k\end{cases}$ أي $\begin{cases}k=0\\k=1\\k=-2\end{cases}$ و هذا مستحيل.

و بالتالي النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

2. نبين بكل سهولة أن $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$. إذن الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{\text{AC}}$.

3. الشعاع $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و بالتالي فمعادلته هي من الشكل:

$3x+4y-2z=c$. علما مثلا أن النقطة A نقطة منه فان $c=-1$.

ومنه: معادلة المستوي (ABC) هي: $3x+4y-2z+1=0$.

ب) I مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2)\}$ و G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$.

1. لدينا : $I\left(1,\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$ و $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{t+3}\overrightarrow{IC}$.

2. الدالة: $t\mapsto\frac{t}{t+3}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$ و تأخذ قيمها في المجال $]0;1[$.

بما أن: $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{t+3}\overrightarrow{IC}$ و $t<\frac{t}{t+3}<1$ فإن G نقطة من القطعة $[IC]$ باستثناء النقطتين I و C .

3. تنطبق النقطة G على منتصف القطعة $[IC]$ إذا و فقط إذا كان $\frac{t}{t+3}=\frac{1}{2}$ أي $t=3$.

التمرين الثالث:

أ) g الدالة العددية المعرفة على كما يلي: $g(x)=x+e^{2(x-1)}$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=1+2e^{2(x-1)}$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$.

إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و منه جدول تغيراتها:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2. الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$.
إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.
و بما أن $g\left(-\frac{1}{5}\right)\times g\left(-\frac{1}{10}\right)<0$ فإن $\alpha \in \left[-\frac{1}{5},-\frac{1}{10}\right]$.
3. إشارة $g(x)$ هي إذن كالآتي:

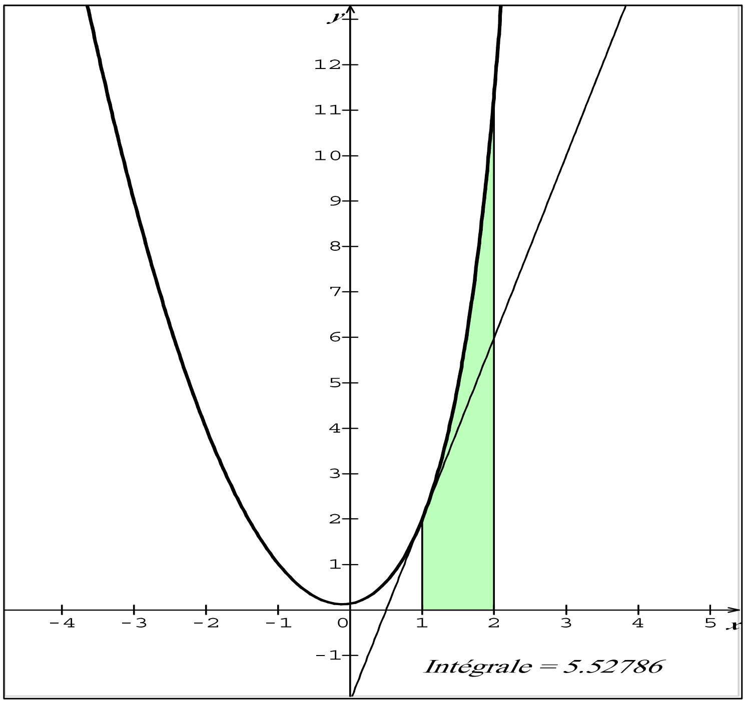
x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

ب) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=x^2+e^{2(x-1)}$.
1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=2x+2e^{2(x-1)}=2\left(x+e^{2(x-1)}\right)$.
و هكذا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=2g(x)$.
و بالتالي فإشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
لدينا من جهة ثانية: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
نستنتج مما سبق جدل تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2. نعلم أن $g(\alpha)=0$ أي $\alpha+e^{2(\alpha-1)}=0$ و هذا يعني $e^{2(\alpha-1)}=-\alpha$.
لدينا: $f(\alpha)=\alpha^2+e^{2(\alpha-1)}$ و منه $f(\alpha)=\alpha^2-\alpha$.
بما أن $-\frac{1}{5}\le\alpha\le-\frac{1}{10}$ و علما أن الدالة: $x\mapsto x^2-x$ متناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{5},-\frac{1}{10}\right]$ فإن
$\left(-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}<f(\alpha)<\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$. نجد بعد الحساب: $\frac{11}{100}<f(\alpha)<\frac{6}{25}$.
3. * لدينا: $f(-1)\simeq1,01$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)\simeq0,29$ ، $f\left(\frac{1}{2}\right)\simeq0,61$ و $f(1)=2$.
* معادلة المماس (Δ) هي: $y=4x-2$.

* الرسم:



4. لدينا:

$a=\int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{1}^{2}\left(x^2+e^{2(x-1)}\right)dx$ و منه $a=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}e^{2(x-1)}\right]_1^2$.

نجد بعد التعويض و التبسيط: $a=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{3}+e^2\right)u.a$.

و هكذا نجد أخيرا و علما أن الوحدة هي $5cm$:

$a=\frac{25}{2}\left(\frac{11}{3}+e^2\right)cm^2$.

الموضوع رقم : 03

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

5. بإتباع خوارزمية إقليدس مثلا نحصل على الجدول الآتي:

الحاصل		1	8
القاسم و المقسوم	3024	2688	336
الباقي		336	0

و هكذا فإن $PGCD(3024;2688)=336$.

6. أ) $2688x+3024y=-3360$ تكافئ $336\times 8x+336\times 9y=336\times(-10)$

و هذا يعني $8x+9y=-10$.

نستنتج هكذا أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان.

ب) لدينا: $8\times(1)+9\times(-2)=8-18=-10$ و منه $(1;-2)$ حل خاص للمعادلة (2).

7. لدينا: $(P):x+2y-z=-2$ و $(P'):3x-y+5z=0$.

أ) الشعاع $\vec{n}(1;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و الشعاع $\vec{n'}(3;-1;5)$ شعاع ناظمي للمستوي (P').

من الواضح أن الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطان خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\vec{n'}=k\vec{n}$.

و عليه فالمستويان (P) و (P') غيرا متوازيين و بالتالي يتقاطعان وفق مستقيم (d).

ب) إذا كانت $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (d) فإن: $\begin{cases}x+2y-z=-2\\3x-y+5z=0\end{cases}$. بعد ضرب طرفي المعادلة الأولى في العدد 5 نحصل على: $\begin{cases}5x+10y-5z=-10\\3x-y+5z=0\end{cases}$.

بجع طرف لطرف نحصل على: $8x+9y=-10$.

نستنتج هكذا أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2).

لنعين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة و التي تحقق المعادلة (2).

لدينا: $\begin{cases}8x+9y=-10\\8\times(1)+9\times(-2)=-10\end{cases}$. بالطرح ينتج: $8(x-1)=9(-y-2)$.

لدينا: 9 يقسم $8(x-1)$ و $PGCD(8;9)=1$ فإن حسب مبرهنة غوص 9 يقسم $(x-1)$.

نستنتج هكذا أن: $x-1=9k$ حيث k عدد صحيح.

بالتعويض نجد: $-y-2=8k$. أي $y+2=-8k$.

نستنتج أن الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة بحيث: $\begin{cases} x=9k+1 \\ y=-8k-2 \end{cases}$ و k عدد صحيح.

نستنتج هكذا أن (E) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $\begin{cases} x=9k+1 \\ y=-8k-2 \end{cases}$ مع k و z عددان صحيحان.

<u>التمرين الثاني</u>:

f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=\frac{1}{2}(1+i)z+1$.

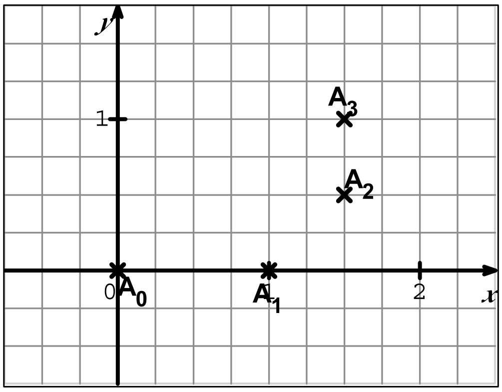
1. العبارة المركبة للتحول النقطي f هي من الشكل $z'=az+b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب.

لدينا: $a=\frac{1}{2}(1+i)$ و منه $a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. نستنتج هكذا أن: $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$.

من جهة ثانية فإن ω لاحقة Ω تحقق: $\omega=\frac{b}{1-a}$ و عليه $\omega=\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+i)}$. نجد: $\omega=1+i$.

2. نسمي A_0 النقطة O و من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $A_{n+1}=f(A_n)$.

أ) إذا رمزنا إلى لاحقة A_n بالرمز z_n يكون لدينا: $z_{n+1}=\frac{1}{2}(1+i)z_n+1$. و بالتالي:



$z_1=\frac{1}{2}(1+i)z_0+1$ و منه $z_1=1$.

$z_2=\frac{1}{2}(1+i)z_1+1$ و منه $z_2=\frac{1}{2}(3+i)$.

$z_3=\frac{1}{2}(1+i)z_2+1$ و منه $z_3=\frac{3}{2}+i$.

ب) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\Omega A_n$.

لدينا: $u_{n+1}=\Omega A_{n+1}$ و بما أن $A_{n+1}=f(A_n)$ فإن $\begin{cases} \Omega A_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n \\ \left(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{4} \end{cases}$.

و منه $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n$. نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و حده الأول $u_0=\sqrt{2}$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=u_0\times q^n$ و عليه: $u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

ج) تنتمي النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره $0{,}1$ إذا و فقط كان $\Omega A_n \le 0{,}1$.

$\Omega A_n \leq 0{,}1$ يعني $u_n \leq 0{,}1$ أي $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0{,}1$ و هذا يعني $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \frac{0{,}1}{\sqrt{2}}$.

لدينا: $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \ln\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}\right)$ أي $n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq \ln\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}\right)$ و منه $n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

نجد بعد الحساب و بالتقريب: $n \geq 7{,}57$ و منه $n_0 = 8$.

3. أ) المثلث $\Omega A_0 A_1$ قائم في A_1 و متساوي الساقين لأن: $\Omega A_1 = A_0 A_1 = 1$ و $(A_0A_1) \perp (\Omega A_1)$.

من خواص التشابه المباشر نستنتج أن المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ قائم في A_{n+1} و متساوي الساقين.

ب) لدينا: $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$.

و منه: $l_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + ... + \Omega A_n$ و عليه: $l_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

و بما أن (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن: $l_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$.

نجد بعد الحساب: $l_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$.

بما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

<u>التمرين الثالث:</u>

أ) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

$f(x) = e^x - (3x+1)$.

1. $e^x - 3 \geq 0$ يعني $e^x \geq 3$ أي $x \geq \ln 3$ و منه إشارة $e^x - 3$ هي كالآتي:

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$e^x - 3$	$-$	0	$+$

2. لدينا: $f(0) = 0$ ، $f\left(\frac{5}{4}\right) \simeq -1{,}26$ و $f(2) \simeq 0{,}04$.

الدالة f مستمرة على المجال $\left[\frac{5}{4};2\right]$ و $f\left(\frac{5}{4}\right) \times f(2) < 0$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $f(\alpha) = 0$ مع $\frac{5}{4} < \alpha < 2$.

3. تعيين نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-3x-1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-3\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)=+\infty$.

4. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=e^x-3$. و منه جدول تغيراتها:

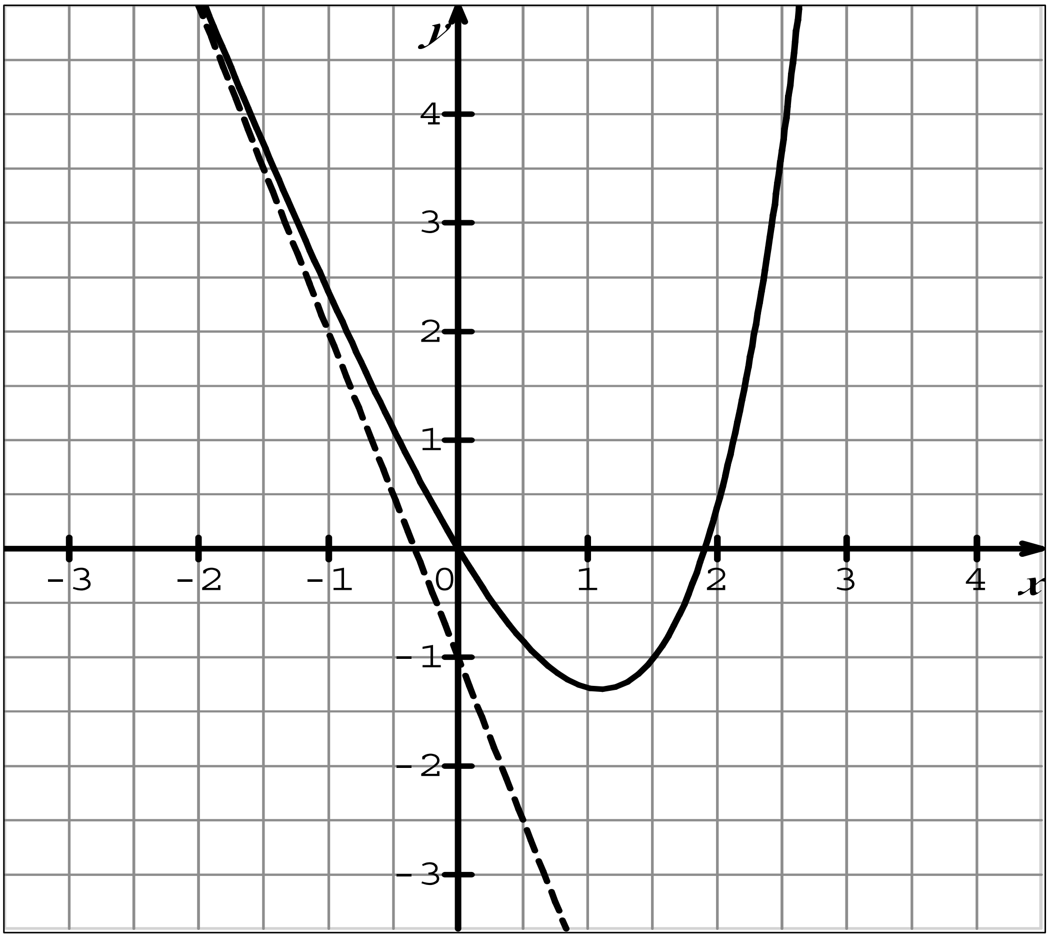
x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2-3\ln 3$	↗	$+\infty$

5. لدينا: $f(x)-(-3x-1)=e^x$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-3x-1)\right]=0$.

نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-3x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

و بما أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x>0$ فإن $f(x)-(-3x-1)>0$. نستنتج أن المنحني (C_f) يقع أعلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

6. الرسم:



ب) g الدالة المعرفة كما يأتي:

$$g(x) = e^x - \frac{3}{2}x^2 - x + 1 .$$

1. الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $g'(x) = e^x - 3x - 1$ و منه $g'(x) = f(x)$.

كما أن: $g(0) = 2$. و منه g هي الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $g(0) = 2$.

2. يكون المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2$ مماسا للمنحني (C_g) في نقطة فاصلتها β إذا و فقط إذا كان $g'(\beta) = 0$ و $g(\beta) = 2$.

$g'(x) = 0$ يعني $f(x) = 0$ و بما أن $g(\beta) = 2$ فإن $\beta = 0$.

3. لدينا: $g(-1) \simeq 2,22$ و $g\left(-\frac{3}{2}\right) \simeq -2,66$.

الدالة g مستمرة على المجال $\left]-\frac{3}{2};-1\right[$ و $g\left(-\frac{3}{2}\right) \times g(-1) < 0$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا x_0 في المجال $\left]-\frac{3}{2};-1\right[$.

4. دراسة تغيرات الدالة g:

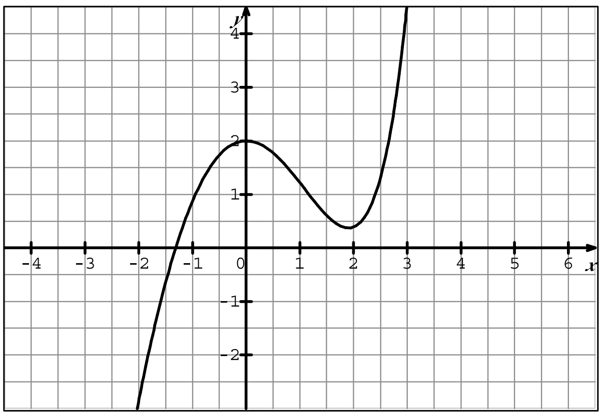
* لدينا: $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

* لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x) = f(x)$ ومنه فإشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $f(x)$.

و عليه جدول تغيرات الدالة g هو كالآتي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

5. الرسم:



الموضوع رقم : **04**

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. لدينا: $(1+i)z^2-2z+1-i=0$

ومنه: $\Delta=b^2-4ac=-4=(2i)^2$ $z'=\dfrac{2-2i}{2(1+i)}=-i$ و $z''=\dfrac{2+2i}{2(1+i)}=1$.

مجموعة الحلول هي إذن: $S=\{1;-i\}$.

أو نلاحظ أن العدد 1 حل للمعادلة . لدينا $z'+z''=-\dfrac{b}{a}$ و $z'\times z''=\dfrac{c}{a}$ و هكذا:

$1\times z''=\dfrac{1-i}{1+i}=-i$ ومنه . $z'=1$ و $z''=-i$

2. لدينا m عدد مركب حيث: $|m|=\sqrt{2}$ و $mz^2-2z+\overline{m}=0$.

$\Delta=4-4m\overline{m}=4-4|m|^2=-4=(2i)^2$

$z_1=\dfrac{1+i}{m}=\dfrac{1}{2}(1+i)\overline{m}$ و $z_2=\dfrac{1-i}{m}=\dfrac{1}{2}(1-i)\overline{m}$

ومنه مجموعة الحلول هي: $S=\left\{\dfrac{1}{2}(1+i)\overline{m}\,;\,\dfrac{1}{2}(1-i)\overline{m}\right\}$.

3. نضع الآن: $m=\sqrt{2}\cdot e^{i\alpha}$ حيث α عدد حقيقي.

أ) لدينا $m=\sqrt{2}e^{i\alpha}$ و $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $\overline{m}=\sqrt{2}e^{-i\alpha}$.

$z_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-i\alpha}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ و $z_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-i\alpha}=e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

ب) لدينا $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ و $M(z_1+z_2)$ وعليه:

* $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}}{e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$. إذن: $\dfrac{z_1}{z_2}=i$.

نعلم أن: $\left(\overrightarrow{OM_2};\overrightarrow{OM_1}\right)=arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ و منه $\left(\overrightarrow{OM_2};\overrightarrow{OM_1}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

نستنتج هكذا أن الشعاعين: $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{OM_2}$ متعامدان.

* لدينا لاحقة العدد المركب (z_1+z_2) هو الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و من جهة أخرى لاحقة العدد المركب (z_1+z_2) هو $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$ ومنه: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$. نستنتج أن الرباعي OM_1MM_2 متوازي أضلاع. لدينا $\left(\dfrac{z_1}{z_2}=i\right)$ و منه: $|z_1|=|z_2|$ أي $OM_1=OM_2$ و بما أن $\overrightarrow{OM_1}\perp\overrightarrow{OM_2}$ فإن الرباعي OM_1MM_2 مربع.

التمرين الثاني:

أ) لدينا : $p(x)=2x^3+x^2-13x+6$.

1. نتحقق بكل سهولة من أن $p(2)=0$ ومنه توجد ثلاث أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون لدينا: $p(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$.

بعد النشر و المطابقة أو باستعمال عملية القسمة أو طريقة هورنر نجد: $a=2$ ، $b=5$ و $c=-3$.

ومنه: $p(x)=(x-2)(2x^2+5x-3)$.

إذن $[\ p(x)=0\ ]$ تكافئ $[\ x-2=0$ أو $2x^2+5x-3=0\ ]$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(x)=0$ هي $S=\left\{2;\frac{1}{2};-3\right\}$.

2. المعادلة: (1).... $2(\ln x)^3+(\ln x)^2-13\ln x+6=0$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$

نلاحظ أن المعادلة (1) تكافئ $p(\ln x)=0$ و بالتالي:

$[\ \ln x=2$ أو $\ln x=\frac{1}{2}$ أو $\ln x=-3\ ]$ ومنه $[\ x=e^2$ أو $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ أو $x=e^{-3}=\frac{1}{e^3}\ ]$.

مجموعة الحلول هي إذن: $S_1=\left\{e^2;\sqrt{e};\frac{1}{e^3}\right\}$.

المعادلة: (2) .... $6e^{-3x}+e^{-x}-13e^{-2x}+2=0$ معرفة على $\mathbb{R}$.

بضرب طرفي المعادلة في e^{3x} نحصل على: $2e^{3x}+e^{2x}-13e^{x}+6=0$.........$(2')$

ومنه نلاحظ أن المعادلة $(2')$ تكافئ $p(e^x)=0$ و بالتالي:

$[\ e^x=2$ أو $e^x=\frac{1}{2}\ ]$ ومنه $[\ x=\ln 2$ أو $x=-\ln 2\ ]$ مع مستحيلة $e^x=-3$.

مجموعة الحلول هي إذن: $S_3=\{-\ln 2;+\ln 2\}$.

ب) لدينا: a ؛ b ؛ c حدود متعاقبة من متتالية هندسية حيث $a>0$ و $b>0$ و $c>0$.

1. لدينا إذن: $b^2=a\times c$ ومنه $\ln(b^2)=\ln(a\times c)$ أي $2\ln b=\ln a+\ln c$.

وهذا يعنى أن الأعداد: $\ln a$ ؛ $\ln b$ ؛ $\ln c$ هي حدود متعاقبة من متتالية حسابية.

2. لدينا: $\ln(abc)=21$ تعني $\ln a+\ln b+\ln c=21$ ومنه $\ln b=7$.

بالتعويض نجد $\ln a+\ln c=14$. بوضع $\ln a=\alpha$ و $\ln c=\beta$ نجد $(\ln a)(\ln c)=-15$

$\begin{cases}\alpha+\beta=14\\ \alpha\beta=-15\end{cases}$ ومنه α و β هما حلا المعادلة: $x^2-14x-15=0$ ومنه:

$[\ \alpha=-1$ و $\beta=15\ ]$ أي $a=e^{-1}$ و $c=e^{15}$ أو $[\ \alpha=15$ و $\beta=-1\ ]$ أي $a=e^{15}$ و $c=e^{-1}$.

نستنتج هكذا أن:

$(a;b;c)=\left(\frac{1}{e};e^7;e^{15}\right)$ أو $(a;b;c)=\left(e^{15};e^7;\frac{1}{e}\right)$.

التمرين الثالث: $f(x)=x+1-\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}$.

1. من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، $-x$ هو كذلك عنصر من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ و لدينا:

$f(-x)=-x+1-\frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1}$ و منه: $f(-x)=-x+1-\frac{2}{1-e^{x}}$.

لدينا: $f(-x)+f(x)=\left(-x+1-\frac{2}{1-e^{x}}\right)+\left(x+1-\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}\right)$ و عليه: $f(-x)+f(x)=0$.

نستنتج هكذا أن الدالة f دالة فردية.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to0^{-}}f(x)=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=-\infty$.

2. اتجاه التغير: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ و لدينا:

$f'(x)=1+\frac{2e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$ ومنه $f'(x)>0$. إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3. بما أن f مستمرة و متزايدة تماما علي المجال $[1;2]$ و $f(1)\times f(2)<0$ لأن $f(1)<0$ و $f(2)>0$

فانه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha\in]1;2[$ و يحقق: $f(\alpha)=0$.

4. لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}=0$ ومنه المستقيم $(\Delta_1):y=x+1$ مقارب مائل عند $-\infty$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\frac{2e^{x}}{e^{x}-1})=0$ ومنه المستقيم $(\Delta_2):y=x-1$ مقارب مائل عند $+\infty$.

5. لدراسة وضعية (C_f) والمستقيم (Δ_1) ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=-\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}$.

و منه فإشارة الفرق $f(x)-y$ هي عكس إشارة $e^{x}-1$.

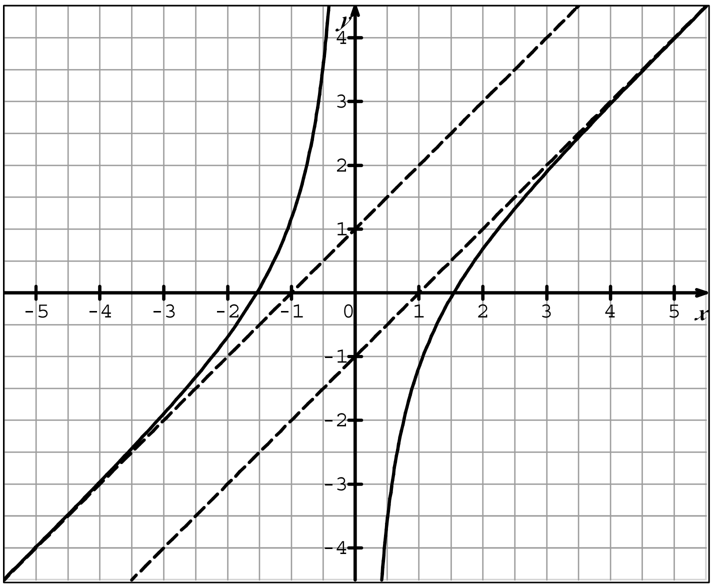
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	+	‖	−
الوضعية	(C_f) فوق (Δ_1)	‖	(C_f) تحت (Δ_1)

لدراسة وضعية (C_f) والمستقيم (Δ_2) ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=-\dfrac{2}{e^x-1}$.

و منه فإشارة الفرق $f(x)-y$ هي عكس إشارة e^x-1 .

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ_2)	(C_f) تحت (Δ_2)

الرسم:



الموضوع رقم : **05**

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

أ) لدينا: $z^2-(3+i)z+4=0$ .....(E) .

1. نضع $\delta=x+iy$ حيث $\delta^2=-8+6i$.

لدينا إذن: $\begin{cases}x^2+y^2=10\\x^2-y^2=-8\\2xy=6\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x^2=1\\y^2=9\\xy>0\end{cases}$ و هكذا نجد: $\delta_1=1+3i$ و $\delta_2=-\delta_1=-1-3i$.

2. لدينا: $\Delta=-8+6i$ و منه $\Delta=(1+3i)^2$.

الحلان هما إذن: $z_1=1-i$ و $z_2=2+2i$.

ب) لتكن النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب i ، z_1 و z_2 .

1. الصيغة العامة للتحويل R هي: $z'-i=e^{i\theta}(z-i)$.

بما أن: $R(B)=C$ فإن: $z_2-i=e^{i\theta}(z_1-i)$ و منه $e^{i\theta}=\dfrac{z_2-i}{z_1-i}$.

نجد هكذا أن: $e^{i\theta}=i$ و منه $z'-i=i(z-i)$ و عليه فالكتابة المركبة للدوران R هي:

$z'=iz+1+i$.

2. لدينا: $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و منه فزاوية الدوران R هي $\dfrac{\pi}{2}$.

3. بما أن $R(B)=C$ فإن $AB=AC$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}$.

نستنتج هكذا أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .

التمرين الثاني:

1. $4y''+y=0$ تعني $y''+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2y=0$.

و منه الحل العام y للمعادلة هو من الشكل: $y=c_1\cos\left(\dfrac{1}{2}x\right)+c_2\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)$.

حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيا كيفيان.

2. الحل الخاص f يحقق $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ ، $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$ و بما أن:

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}c_1\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)+\dfrac{1}{2}c_2\cos\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ و عليه لدينا:

و منه نجد: $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(c_1+c_2)=\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}(c_1-c_2)=0 \end{cases}$ $c_1=c_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

و هكذا فإن: $f(x)=\frac{\sqrt{6}}{2}\left[cox\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right]$.

التمرين الثالث:

أ) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $g(x)=-4+(4-2x)e^x$.

1. $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-4$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $g'(x)=2(1-x)e^x$.

و منه فإشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	-4	↗	$-4+2e$	↘	$-\infty$

2. معادلة مماس منحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=2x$.

3. الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1,68;1,69]$ و لدينا $g(1,68)\times g(1,69)<0$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,68<\alpha<1,69$.

لدينا $g(\alpha)=0$ و منه $-4+(4-2\alpha)e^{\alpha}=0$. أخيرا $e^{\alpha}=\frac{2}{2-\alpha}$.

نلاحظ من جهة ثانية أن $g(0)=0$ و من إشارة $g(x)$ هي كالآتي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		−	0	+	0	−	

ب) f و h الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=\frac{2x-2}{e^x-2x}$ و $h(x)=e^x-2x$.

1. الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $h'(x)=e^x-2$. $h'(x)$ هي كالآتي:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
إشارة $h'(x)$	$-$	0	$+$

و منه جدول تغيرات الدالة h:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$h(x)$	↘	$2-2\ln 2$	↗

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x) \geq 2-2\ln 2$ و منه $h(x) > 0$ لأن $2-2\ln 2 > 0$.

2. نبين بكل سهولة أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\left(e^x - 2x\right)^2}$.

3. إشارة $f'(x)$ هي إذن من نفس إشارة $g(x)$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$.

جدول تغيرات الدالة f هو إذن كالآتي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	$f(\alpha)$	↘	0

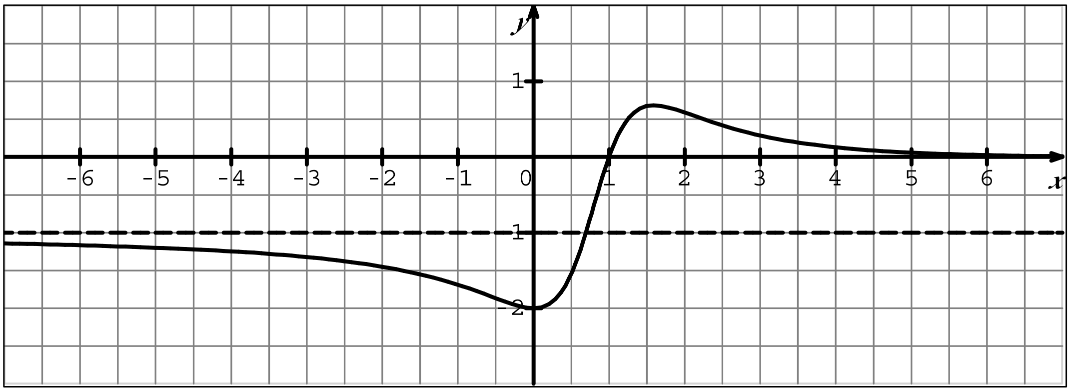
4. لدينا: $e^{\alpha} = \dfrac{2}{2-\alpha}$ و منه بعد التعويض $f(\alpha) = \dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$.

الدالة $\varphi : x \mapsto \dfrac{-x+2}{x-1}$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$ و منه على المجال $[1,59;1,6]$.

و بما أن $1.59 < \alpha < 1.60$ فإن $\varphi(1,6) < \varphi(\alpha) < \varphi(1,59)$.

و عليه $\varphi(1.59) < f(\alpha) < \varphi(1.60)$. نجد بعد الحساب أن $0,67 < f(\alpha) < 0,69$.

5. الرسم



ج) نعتبر الدالة العددية T المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $T(x)=-x+\ln\left(e^{x}-2x\right)$.

1. الدالة T مجموع و مركب دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و لدينا: $T'(x)=-1+\dfrac{e^{x}-2}{e^{x}-2x}$ و منه نجد $T'(x)=\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}$ أي $T'(x)=f(x)$.

2. إذن مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $\mathbb{R}$ هي الدوال F حيث:

$F(x)=-x+\ln\left(e^{x}-2x\right)+k$ مع k عدد حقيقي.

الموضوع رقم : 06

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. لدينا: $f\left(\overline{z}\right)=\dfrac{2\overline{z}-i}{\overline{z}+1-i}$ و بالتالي:

$f\left(\overline{z}\right)=-2$ يعني $\dfrac{2\overline{z}-i}{\overline{z}+1-i}=-2$ و هذا يعني $2\overline{z}-i=-2\overline{z}-2+2i$.

نحصل هكذا على $\overline{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}i$ أي $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}i$.

2. نجد بعد التعويض أن:

$\operatorname{Re}\left(f(z)\right)=\dfrac{2x^2+2y^2+2x+3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$ و $\operatorname{Im}\left(f(z)\right)=\dfrac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

3. يكون $f(z)$ حقيقيا إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Im} f\left(z\right)=0$.

$\operatorname{Im} f\left(z\right)=0$ يعني $x+2y-1=0$ و $(x+1)^2+(y-1)^2\neq 0$

مجموعة النقط هي إذن مجموعة نقط المستقيم ذو المعادلة $x+2y-1=0$ ماعدا النقطة $A(-1;1)$.

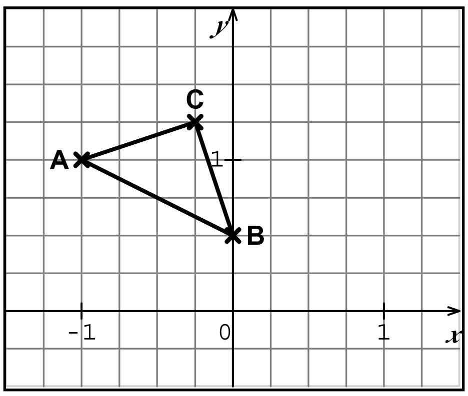
4. $\left|f(z)\right|=2$ يعني $\left|\dfrac{2z-i}{z+1-i}\right|=2$ أي $\dfrac{\left|2\left(z-\dfrac{i}{2}\right)\right|}{\left|z+1-i\right|}=2$

و هذا يعني $\left|z+1-i\right|=\dfrac{\left|2\left(z-\dfrac{i}{2}\right)\right|}{2}$ أي $\left|z-(-1+i)\right|=\left|z-\dfrac{i}{2}\right|$.

لدينا إذن $BM=AM$ أي $AM=BM$.

مجموعة النقط M التي تحقق $\left|f(z)\right|=2$ هي إذن محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

5. إثبات أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في C.



لدينا: $\left|z_A-z_C\right|=\dfrac{1}{4}\sqrt{10}$ و $\left|z_B-z_C\right|=\dfrac{1}{4}\sqrt{10}$.

نستنتج هكذا أن $AC=BC$ و منه فالمثلث ABC متساوي الساقين.

لدينا من جهة ثانية: $\left|z_A-z_B\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ و عليه $BA=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$.

نلاحظ أن $AC^2+BC^2=BA^2$ و منه فالمثلث ABC قائم في C.

إذن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في C.

التمرين الثاني:

1. إثبات أن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x+1}$. و منه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$.

نستنتج هكذا الدالة أن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

<u>ملاحظة</u>: يمكن اعتبار f الدالة المركبة من الدالتين $x\mapsto x+1$ متبوعة بالدالة $x\mapsto \ln x$ و علما أن كلاهما متزايدة فإن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

2. نسمي $P(n)$ الخاصية: " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$ ".

*لدينا $u_0=e$ و منه $u_0>0$. إذن $P(0)$ صحيحة.

* نفرض $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n>0$.

* لنثبت صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>0$.

لدينا $u_n>0$ و منه $1+u_n>1$ و عليه $\ln(1+u)_n>0$. نستنتج هكذا أن $u_{n+1}>0$.

إذن $P(n+1)$ صحيحة.

و عليه $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3. g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $g(x)=\ln(x+1)-x$.

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $g'(x)=-\frac{x}{x+1}$ و منه فإشارة $g'(x)$ عي عكس إشارة x .

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	0	↘	

و منه إشارة $g(x)$ هي كالآتي:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	

بما أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g(x)<0$ فإن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)<x$.

علما أن $u_n>0$ فإن $f(u_n)<u_n$ و منه $u_{n+1}<u_n$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متناقصة.

4. بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل فهي إذن متقاربة.

إذا فرضنا أن نهايتها هي l فإن $f(l)=l$ أي $f(l)-l=0$ و هدا يعني أن $g(l)=0$.

لدينا من دراسة إشارة $g(x)$ ، $g(0)=0$ و عليه فإن $l=0$.

التمرين الثالث:

أ) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي : $h(x)=(x-1)e^{-x}+2$.

1. $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}-e^{-x}+2\right)$ و منه $\lim_{x\to+\infty} h(x)=2$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h'(x)=(2-x)e^{-x}$.

إشارة $h'(x)$ هي إذن من نفس إشارة $2-x$. و منه جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$e^{-2}+2$	↘	2

2. تبيان أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38;-0.37[$.

الدالة h مستمرة و متزايدة تماما على $]-\infty;2]$ و منه على المجال $]-0.38;-0.37[$ و بما أن $h(-0.38)\times h(-0.37)<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38;-0.37[$.

3. إشارة $h(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h(x)$		−	0	+	

ب) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

6. لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=2-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)e^{-x}+2$.

و هكذا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=h(x)$.

7. دراسة تغيرات الدالة f : إشارة $f'(x)$ هي إذن من نفس إشارة $h(x)$.

لدينا من جهة ثانية: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

8. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^{-x}=0$ ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

9. لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لمستقيمه المقارب (d) ندرس إشارة $f(x)-(2x+1)$.

لدينا: $f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ و منه فإشارة $f(x)-(2x+1)$ هي عكس إشارة x.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$f(x)-(2x+1)$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (d)	(C_f) تحت (d)

10. نقطة الانعطاف: لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f''(x)=h'(x)$ و منه:

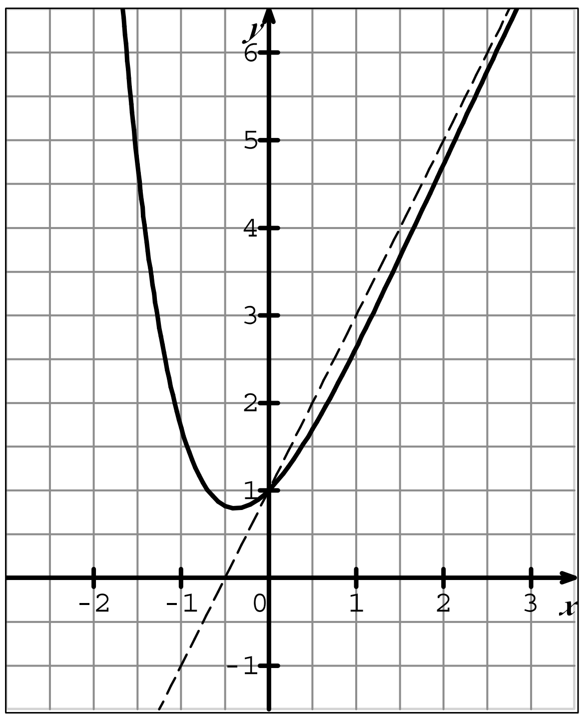
x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f''(x)$	$+$ 0 $-$

بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $\left(2;5-\dfrac{2}{e^2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

11. إثبات أن: $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

لدينا: $h(\alpha)=0\Leftrightarrow e^{-\alpha}=-\dfrac{2}{\alpha-1}$ ومنه $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}=2\alpha+1+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

12. الرسم:



ج) $\left(\Delta_\beta\right)$مستقيم معادلته $y=2x+\beta$ حيث β عدد حقيقي.

1. تعيين βحتى يكون $\left(\Delta_\beta\right)$ مماسا للمنحنى $\left(C_f\right)$.

المستقيم $y=2x+\beta$ مماسا للمنحنى$\left(C_f\right)$ في نقطة منه فاصلتها x_0 يعني $f'(x_0)=2$.

$f'(x_0)=2$ يعني $h(x)=2$ أي $(x-1)e^{-x}=0$ و بالتالي $x_0=1$.

لدينا: $f(1)=3-e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي: $y=2x+1-e^{-1}$. بالمطابقة نجد $\beta=1-e^{-1}$.

2. المناقشة البيانية:

$-\dfrac{x}{e^x}+1-\beta=0$ يعني $\beta=-xe^{-x}+1$ و بإضافة $2x$ إلى الطرفين نحصل على:

$2x+\beta=-x\mathrm{e}^{-x}+1+2x$ أي $2x+\beta=f\left(x\right)$.

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى$\left(C_f\right)$ مع المستقيم $\left(\Delta_\beta\right)$.

لدينا هكذا:

إذا كان : $\beta\in\left]-\infty;1-e^{-1}\right[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

إذا كان $\beta=1-e^{-1}$ للمعادلة حل مضاعف.

إذا كان $\beta\in\left]1-e^{-1};1\right[$ للمعادلة حلان.

إذا كان $\beta\geq 1$ ليس للمعادلة حلولا.

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

الموضوع رقم : 07

التمرين الأول:

أ) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود التالي:

$$P(z)=z^3-(5+i)z^2+(10+6i)z-8-16i\ .$$

1. $P(z)$ يقبل حلا تخيليا صرفا هو: $z_0=2i$.

2. لحل المعادلة $P(z)=0$ نقوم بتحليل $P(z)$ فنحصل على:

$$p(z)=(z-2i)\left(z^2+(-5+i)z+8-4i\right)$$

$P(z)=0$ يعني $z=2i$ أو $z^2+(-5+i)z+8-4i=0$.

مميز المعادلة: $z^2+(-5+i)z+8-4i=0$ هو $\Delta=-8+6i=(1+3i)^2$

حلا المعادلة $z^2+(-5+i)z+8-4i=0$ هما إذن: $z'=2-2i$ و $z''=3+i$.

3. نضع: $z_0=2i$ ، $z_1=2-2i$ و $z_2=3+i$.

*لدينا: $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}\right)$ و $z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

و منه $z_0=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_1=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

*لدينا: $\left(\frac{z_0}{2}\right)^{1429}=e^{i\frac{1429\pi}{2}}$ و عليه $\left(\frac{z_0}{2}\right)^{1429}=e^{i\frac{(1428+1)\pi}{2}}$ أي $\left(\frac{z_0}{2}\right)^{1429}=e^{i\frac{\pi}{2}}$. إذن $\left(\frac{z_0}{2}\right)^{1429}=i$.

$\left(\frac{z_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2008}=e^{-i\frac{2008\pi}{4}}$ و عليه $\left(\frac{z_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2008}=e^{-502i}$ أي $\left(\frac{z_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2008}=e^{i(0)}$. إذن $\left(\frac{z_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2008}=1$.

ب) نضع: $\alpha=\dfrac{z_2-2+(\sqrt{3}-1)i}{z_1}$

1. لدينا من جهة : $\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2(1-i)}$ و منه $|\alpha|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

و لدينا: $a\text{rg}(\alpha)=\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)-\arg(z_1)$ و منه $a\text{rg}(\alpha)=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ أي $a\text{rg}(\alpha)=\frac{7\pi}{12}$.

2. كتابة α على الشكل الجبري واستنتاج كلا من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

لدينا بعد إجراء مختلف الحسابات: $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}i$.

ومنه : $\sin\frac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\cos\frac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

التمرين الثاني:

أ) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = e^{-\frac{1}{3}+2n}$.

1. إثبات أن المتتالية (u_n) هندسية.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = e^2 \times u_n$.

و منه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$ و حدها الأول $u_0 = e^{-\frac{1}{3}}$.

2. حساب المجموعين S_1 و S_2:

لدينا: $S_1 = e^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2}\right)$ و $S_2 = e^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1-e^{4(n+1)}}{1-e^4}\right)$.

3. تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_1 = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{10}\right)$.

$S_1 = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{10}\right)$ يعني $\frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{10}\right) = e^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2}\right)$.

نستنتج هكذا أن: $2(n+1) = 10$ و عليه $n = 4$.

ب) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $v_n = \ln(u_n)$.

1. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = v_n + 2$.

و منه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول: $v_0 = -\frac{1}{3}$.

2. لدينا: $S' = \frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2}$ و منه $S' = \frac{(n+1)(3n-1)}{3}$.

3. تعيين العدد الطبيعي n علما أن: $S' = \frac{160}{3}$.

$S' = \frac{160}{3}$ يعني $\frac{(n+1)(3n-1)}{3} = \frac{160}{3}$ أي $(n+1)(3n-1) = 160$ و منه $3n^2 + 2n - 1 = 0$.

لهذه المعادلة حلا طبيعيا و حيدا هو: $n = 7$.

التمرين الثالث:

أ) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $g(x) = (3-2x)e^x + 2$.

1. لدينا: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x) = (1-2x)e^x$.

و منه إشارة $g'(x)$ هي من نفسي إشارة $1-2x$.

الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيرات g هو إذن كالآتي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

3. لدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1,59;1,6]$ و لدينا $g(1,59)\times g(1,6)<0$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.59<\alpha<1.60$.

4. إشارة $g(x)$:

5.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	

ب) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=\dfrac{e^x+4x-1}{e^x+1}$.

1. لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مستقيما مقاربا (d) معادلته $y=1$.

2. نثبت بكل سهولة أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+1)^2}$.

3. لدينا: $g(\alpha)=0$ و منه $(3-2\alpha)e^\alpha+2=0$ و بما أن $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha+4\alpha-1}{e^\alpha+1}$

فإن $f(\alpha)=\dfrac{(2\alpha-1)(4\alpha-5)}{2\alpha-1}$.

و عليه $f(\alpha)=4\alpha-5$.

نعلم أن $1.59<\alpha<1.60$ و منه $4\times1.59-5<f(\alpha)<4\times1.60-5$.

نستنتج هكذا أن: $1,36\le f(\alpha)\le 1,4$.

4. إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ و سبق و أن درسنا إشارة $g(x)$ و عليه جدوا تغيرات الدالة f هو كالآتي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$4\alpha-5$	↘	1

5. تبيان أن المستقيم (Δ)ذو المعادلة $y=4x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

لدينا: $f(x)-(4x-1)=\dfrac{e^x+4x-1}{e^x+1}-(4x-1)$ أي $f(x)-(4x-1)=\dfrac{2(1-2x)e^x}{e^x+1}$.

و عليه: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(4x-1)=0$.

نستنتج هكذا أن المستقيم (Δ)ذو المعادلة $y=4x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

6. وضعية (C_f)بالنسبة للمستقيم (Δ):

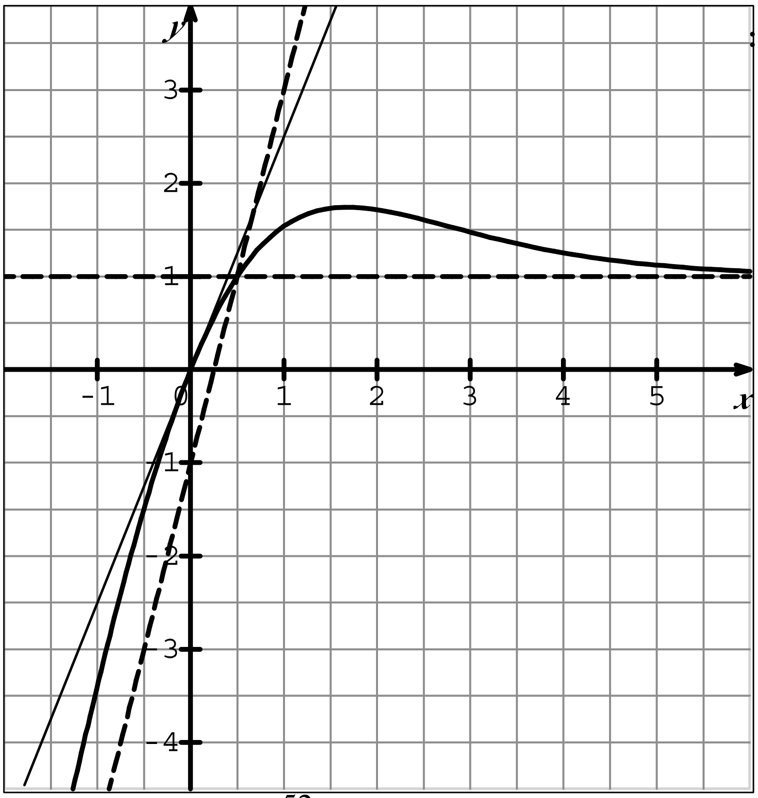
حسب ما سبق فإن إشارة $f(x)-(4x-1)$ هي من نفس إشارة $1-2x$.

و عليه وضعية (C_f)بالنسبة للمستقيم (Δ) هي ملخصة في الجدول الآتي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)-y$	+	‖	−
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)

7. معادلة (T) مماس (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y=\dfrac{5}{2}x$.

8. الرسم :



9. المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m لعدد و إشارة حلول المعادلة:

$me^x - 4x + m + 2 = 0$.

$me^x - 4x + m + 2 = 0$ تعني $m\left(e^x + 1\right) = 4x - 2$ أي $m = \frac{4x-2}{e^x+1}$ و منه $m + 1 = 1 + \frac{4x-2}{e^x+1}$

و هكذا نحصل على $f\left(x\right) = m + 1$.

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني $\left(C_f\right)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y = m + 1$.

و منه المناقشة:

إذا كان $m < -1$ فإن للمعادلة حلا وحيدا سالبا تماما .

إذا كان $-1 < m \leq 0$ فإن للمعادلة حلا وحيدا موجبا تماما.

إذا كان $0 < m \leq 4\alpha - 6$ للمعادلة حلين موجبين تماما.

إذا كان $m = 4\alpha - 6$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا تماما.

إذا كان $m > 4\alpha - 6$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.

الموضوع رقم : 08

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. f دالة معرفة كما يأتي: $f(x)=x+1+2[\ln x-\ln(x-1)]$.

- خطأ: الدالة f معرفة على $]1;+\infty[$.
- صحيح: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$.
- صحيح: $\left[\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$.

2. f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$.

- خطأ: $f'(x)=\frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}$. إذن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
- صحيح: $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x}$ و منه إشارة g' هي من نفس إشارة x^2-1 .
- خطأ: على $]0;+\infty[$ الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى عند 1 تساوي 3.
- خطأ: على $]0;+\infty[$، $g(x)\geq 3$ أي $g(x)>0$ و منه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

التمرين الثاني:

1. بفرض q أساس المتتالية يكون لدينا: $U_5=U_3\times q^2$ و منه $q^2=4$ و بما أن الحدود موجبة فإن $q=2$. نعلم أن $U_3=U_0\times q^3$ و منه $U_0=3$. و بالتالي: $U_n=3\times 2^n$.
2. $S_n=U_0\times\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ و منه $S_n=3\left(2^{n+1}-1\right)$.
3. $S_n=381$ يعني $3\left(2^{n+1}-1\right)=381$ أي $2^{n+1}=128$ و عليه $2^{n+1}=2^7$ و منه $n=6$.
4. لدينا: $P_n=U_0q^1\times U_0q^2\times\ldots\times U_0q^n$ و منه $P_n=U_0{}^n\left(q^1\times q^2\times\ldots\times q^n\right)$

نجد هكذا: $P_n=U_0{}^n\times q^{1+2+\ldots+n}$ و عليه: $P_n=3^n\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

التمرين الثالث:

$\begin{cases}x^2+2y=16\\ \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)\end{cases}$ يعني $\begin{cases}y=3x\\ x^2+2y=16\end{cases}$ مع $xy>0$ أي $\begin{cases}3x=y\\ x^2+6x-16=0\end{cases}$.

للمعادلة $x^2+6x-16=0$ حلان هما 2 و -8 .

من أجل $x=2$ لدينا $y=6$ و من أجل $x=-8$ لدينا $y=-24$.

للجملة إذن حلان هما: $(2;6)$، $(-8;-24)$.

التمرين الرابع:

أ) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

1. $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x)=-\frac{x+1}{x^2}$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)<0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

3. الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في $]-\infty;+\infty[$ و $0\in]-\infty;+\infty[$،

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α.

لدينا من جهة ثانية $f(1)\times f(2)<0$ لأن $f(1)=1$ و $f(2)\simeq-0,2$. إذن $1<\alpha<2$.

4. معادلة المماس (Δ) هي: $y=-2x+3$.

لدينا: $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x+2x-3$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x^2}$.

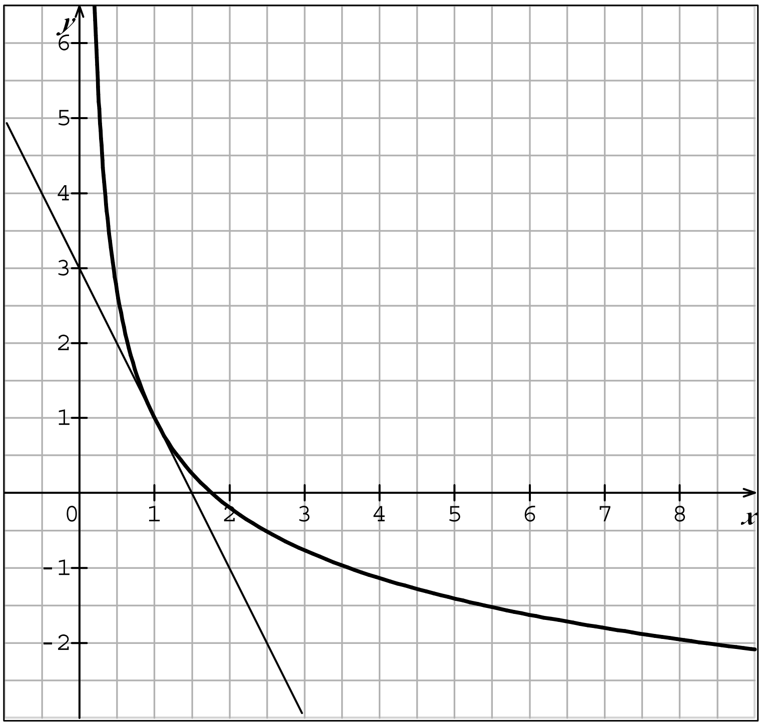
إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $2x^2-x-1$ و الذي جذراه 1 و $-\frac{1}{2}$ و منه جدول تغيرات الدالة g:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

نستنتج من جدول التغيرات السابق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $g(x)\geq 0$ وهذا يعني أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)-(-2x+3)\geq 0$.

نستنتج هكذا أن المنحني (C) يقع أعلى مماسه (Δ).

5. الرسم:



6. نضع $h(x)=x\ln(x)-x+k$.

من الواضح أنت الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $h'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1$.

و منه $h'(x)=\ln x$.

إذن الدالة: $x\to x\ln(x)-x+k$ $(k\in\mathbb{R})$ هي دالة أصلية للدالة $x\to\ln(x)$ على $]0;+\infty[$.

7. لدينا: $A(\alpha)=\int_1^{\alpha}f(x)dx$ و منه $A(\alpha)=[\ln x-x\ln x+x]_1^{\alpha}$.

نجد هكذا أن $A(\alpha)=(\alpha-1)(1-\ln\alpha)$.

نعلم أن $f(\alpha)=0$ و هذا يعني أن $\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}$.

بالتعويض في $A(\alpha)$ نحصل على $A(\alpha)=(\alpha-1)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$.

و هكذا نجد في الأخير أن $A(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ $u.a$.

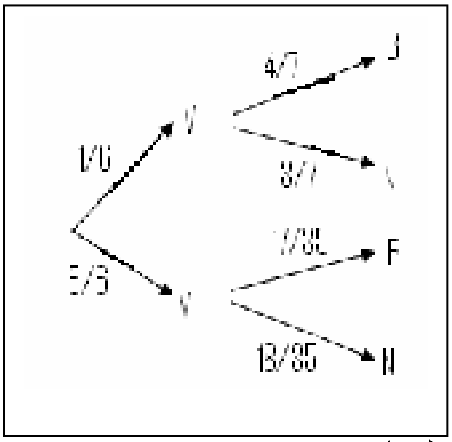
الموضوع رقم : **09**

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

<u>التمرين الأول:</u>

V: " ظهور الرقم 6 " V' : " ظهور 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 " B : " سحب قريصة بيضاء"

الشجرة المتوازنة للاحتمالات:



1. ليكن $p(B)$ احتمال سحب قريصة بيضاء. لدينا:

$p(B)=p\left(B/_V\right)\cdot p(V)+p\left(B/_{V'}\right)\cdot p(V')$ و منه $p(B)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{17}{35}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{21}+\frac{17}{42}=\frac{21}{42}$.

و هكذا: $p(B)=0,5$.

2. إذا سحبنا قريصة بيضاء ، فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الكيس U: $p_B(V)$.

لدينا: $p_B(V)=\frac{p(B\cap V)}{p(B)}$ و منه: $p_B(V)=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{4}{7}}{0,5}$ إذن : $p_B(V)=\frac{4}{21}$.

<u>التمرين الثاني:</u>

1. أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$.

ب) تبيان أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C).

لدينا: $f(x)-(x+2)=e^{2x}-3e^x$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$.

جـ) دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (D).

لدينا: $f(x)-(x+2)=e^x\left(e^x-3\right)$ و منه إشارة $f(x)-(x+2)$ هي من نفس إشارة $\left(e^x-3\right)$.

x	$-\infty$ $\ln 3$ $+\infty$	
e^x-3	$-$ 0	$+$
الوضعية	(C) تحت (D)	(C) فوق (D)

د) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=e^x\left(e^x-3+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)$.

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$.

نتحقق بكل سهولة بعملية نشر أن: $f'(x)=(2e^{x}-1)(e^{x}-1)$.

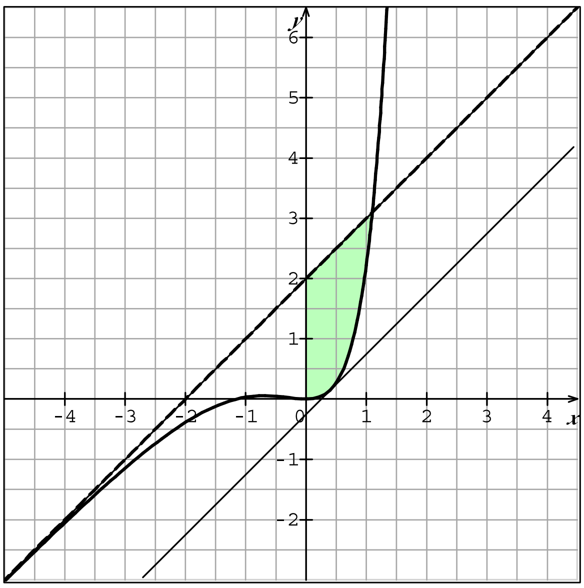
ب) $f'(x)=0$ يعني $(2e^{x}-1)(e^{x}-1)=0$ أي $e^{x}=1$ أو $e^{x}=\frac{1}{2}$ و عليه $x=0$ أو $x=-\ln 2$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{3}{4}-\ln 2$	↘	0	↗	$+\infty$

3. أ) معادلة المماس (T) هي: $y=x-\frac{1}{4}$.

للمستقيمين (T) و (D) نفس معامل التوجيه فهما إذن متوازيان.

ب) إنشاء كل من $(C);(T);(D)$.



ج) حساب المساحة S

لدينا: $S=\int_{0}^{\ln 3}\left[-f(x)+(x+2)\right]dx$ و منه:

$S=\int_{0}^{\ln 3}\left[3e^{x}-e^{2x}\right]dx$ أي $S=\left[3e^{x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{\ln 3}$

و منه $S=2\ u.a$.

و عليه $S=32\,cm^{2}$.

<u>التمرين الثالث:</u>

1.أ) حساب I_0: $I_0=\int_{0}^{1}2e^{-2x}dx=\left[-e^{-2x}\right]_{0}^{1}=1-\frac{1}{e^{2}}=\frac{e^{2}-1}{e^{2}}$

ب) حساب I_n بدلالة n: لدينا: $I_n=\left[-e^{-2x}\right]_{n}^{n+1}$. نجد هكذا: $I_n=\left(\frac{e^{2}-1}{e^{2}}\right)e^{-2n}$.

2.أ) لدينا $I_n=\left(\frac{e^{2}-1}{e^{2}}\right)\left(e^{-2}\right)^{n}$ و منه (I_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-2}$ و حدها الأول I_0.

ب) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-2}\right)^{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

الموضوع رقم : **10**

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. معامل توجيه المماس (OA) هو : $\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = -3$.

2. الجدول الموالي يبين اتجاه تغير الدالة f :

x	-3	1	3
$h(x)$	↘	$f(1)$	↗

3. نلاحظ من التمثيل البياني للدالة f أنه من أجل كل x من $[-3;3]$، $f(x) \geq -2$.
و منه مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq -2$ هي المجال $[-3;3]$.

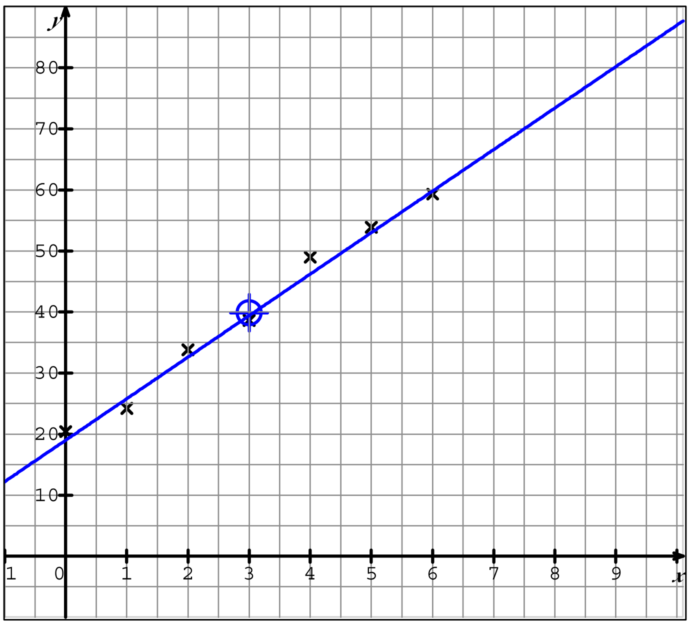
4. لدينا من مختلف المعطيات ما يأتي:

$$\begin{cases} f(-3)=9 \\ f'(1)=0 \\ f'(0)=-3 \\ f(0)=0 \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} -27a+9b-3c+d=9 \\ 3a+2b+c=0 \\ c=-3 \\ d=0 \end{cases}$$ و هذا يعني $$\begin{cases} -3a+b=0 \\ 3a+2b-3=0 \\ c=-3 \\ d=0 \end{cases}$$

و عليه نحصل على $a=\frac{1}{3}$، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$.

التمرين الثاني:

1. تمثيل سحابة النقط:



2. نعلم أن $G(\overline{x};\overline{y})$.لدينا:

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{0+1+2+3+4+5+6}{7}=3 \\ \overline{y}=\dfrac{20,4+24,2+33,8+38,6+49+53,9+59,29}{7}=39,9 \end{cases}$$

و منه $G(3;39,9)$.

3. معادلة مستقيم الانحدار هي من الشكل: $y=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\left(\frac{1}{7}\sum_{i=0}^{i=6}x_iy_i\right)-\overline{x}\times\overline{y}}{\frac{1}{7}\sum_{i=0}^{i=6}(x_i-\overline{x})^2} \quad \text{و} \quad \overline{y}=a\overline{x}+b .$$

من أجل ذلك نستعمل جدولا تلخيصيا لمختلف المراحل المتبعة عند حساب المعامل a :

x_i	y_i	$x_i \times y_i$	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$
0	20,4	0	-3	9
1	24,2	24,2	-2	4
2	33,8	67,6	-1	1
3	38,6	115,8	0	0
4	49	196	1	1
5	53,9	269,5	2	4
6	59,29	355,74	3	9
21	279,19	1028,8		28

نجد بعد الحساب و تطبيق القاعدة السابقة: $a \simeq 6,83$.

نعلم أن النقطة المتوسطة G تنتمي على مستقيم الانحدار و عليه: $\overline{y}=a\overline{x}+b$ أي $b=\overline{y}-a\overline{x}$.

نجد بعد الحساب و تطبيق القاعدة السابقة: $b \simeq 19,39$.

إذن معادلة (d) مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y=6,83x+19,39$.

4. رتبة السنة 2010 هي 9 و عليه فرصيد الشركة المتوقع خلال السنة 2010 هو إذن:

$$6,83\times 9+19,39=80,86 .$$

رصيد الشركة المتوقع خلال سنة 2010 هو 80,86 مليون دينار جزائري.

<u>التمرين الثالث:</u>

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يأتي : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1. لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}$ و منه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

نستنتج أن المستقيم ذا المعادلة $y=1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

2. لتكن الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ بحيث : $F(0)=0$.

أ) بما أن الدالة f دالة ناطقة و معرفة على $[0;+\infty[$ فهي إذن مستمرة على هذا المجال و بالتالي فهي تقبل دالة أصلية وحيدة F على $[0;+\infty[$ تحقق $F(0)=0$.

ب) F قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$.

إشارة $F'(x)$ هي إذن من نفس إشارة $f(x)$.

بما أن من أجل x من $[0;+\infty[$، $f(x)>0$ فإن الدالة F متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3. H و K الدالتان المعرفتان على المجال $[0;+\infty[$ كما يأتي:

$$H(x)=F(x)-x \quad \text{و} \quad K(x)=F(x)-\frac{2}{3}x .$$

<u>دراسة اتجاه تغير الدالة H على المجال</u> $[0;+\infty[$:

الدالة H قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $H'(x)=f(x)-1$

و منه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $H'(x)=-\dfrac{x}{x^2+x+1}$.

نستنتج هكذا أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $H'(x)\le 0$ ومنه H متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

<u>دراسة اتجاه تغير الدالة K على المجال</u> $[0;+\infty[$:

الدالة K قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $K'(x)=f(x)-\dfrac{2}{3}$

و منه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $K'(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$ أي $K'(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$.

نستنتج هكذا أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $K'(x)\ge 0$ ومنه K متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

تبيان أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $F(x)\ge\dfrac{2}{3}x$.

بما أن K متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $K(0)=F(0)-\dfrac{2}{3}(0)=0$

فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $K(x)\ge K(0)$ أي $K(x)\ge 0$.

نستنتج هكذا أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $F(x)-\dfrac{2}{3}x\ge 0$ أي $F(x)\ge\dfrac{2}{3}x$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3}x=+\infty$ و بما أن $F(x)\ge\dfrac{2}{3}x$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

الموضوع رقم : 11

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. دراسة بواقي قسمة 4^n و على 7.

لدينا: $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$ و منه $4^{3k} \equiv 1[7]$ ، $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 2[7]$.

بواقي قسمة 4^n على 7 و التي نرمز إليها بالرمز r هي على النحو الآتي:

إذا كان $n = 3k$ فإن $r = 1$ ، إذا كان $n = 3k+1$ فإن $r = 4$ و إذا كان $n = 3k+2$ فإن $r = 2$.

2. لدينا: $2008 = 3\times 669 + 1$ و منه $4^{2008} \equiv 4[7]$. نستنتج أن باقي قسمة 4^{2008} على 7 هو 4.

لدينا: $1428 = 3\times 476$ و منه $4^{1428} \equiv 1[7]$. نستنتج أن باقي قسمة 4^{1428} على 7 هو 1.

3. لدينا: $4^{2008} + 4^{1428} + 16 \equiv 4 + 1 + 16\,[7]$ و منه $4^{2008} + 4^{1428} + 16 \equiv 21\,[7]$

و بما أن $21 \equiv 0\,[7]$ فإن $4^{2008} + 4^{1428} + 16 \equiv 0\,[7]$.

التمرين الثاني:

لدينا: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. لنبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

نسمي $p(n)$ الخاصية: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

* لدينا: $u_0 = 3$ و منه $u_0 > 0$ بالتالي فإن $p(0)$ صحيحة.

* نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n > 0$.

* لنرهن صحة $p(n+1)$ أي: $u_{n+1} > 0$.

لدينا: $u_{n+1} = 2u_n + 1$ و بما أن $u_n > 0$ فإن $2u_n + 1 > 0$ أي $u_{n+1} > 0$ و منه $p(n+1)$ صحيحة.

نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2. من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 1$.

أ) لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$ و منه $v_{n+1} = 2u_n + 1 + 1$ أي $v_{n+1} = 2(u_n + 1)$ و بالتالي: $v_{n+1} = 2v_n$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ و حدها الأول $v_0 = u_0 + 1$ أي $v_0 = 3$.

ب) نعلم أن: $v_n = v_0 \times q^n$ و منه $v_n = 3\times 2^n$.

و بما أن $v_n = u_n + 1$ فإن $u_n = v_n - 1$ و بالتالي: $u_n = 3\times 2^n - 1$.

3. لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{10}$ أي $S_n = v_0 \times \dfrac{q^{11} - 1}{q - 1}$ و منه: $S_n = 3\times \dfrac{2^{11} - 1}{2 - 1}$.

نستنتج هكذا أن $S_n = 3(2^{11} - 1)$.

لدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$ أي $S'_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + ... + (v_{10} - 2)$. و منه:

$S'_n = (v_0 + v_1 + ... + v_{10}) - 11n$ أي $S'_n = 3(2^n - 1) - 2n$.

التمرين الثالث:

لدينا: $u_1=0$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=u_n+2n-1$.

1. حساب الحدود الخمسة الأولى.

* $u_2=u_1+2(1)-1$ و منه $u_2=0+2(1)-1$ إذن $u_2=1$.

* $u_3=u_2+2(2)-1$ و منه $u_3=1+2(2)-1$ إذن $u_3=4$.

* $u_4=u_3+2(3)-1$ و منه $u_4=4+2(3)-1$ إذن $u_4=9$.

* $u_5=u_4+2(4)-1$ و منه $u_5=9+2(4)-1$ إذن $u_5=16$.

التخمين: من خلال ملاحظة قيم الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) يمكن أن نخمن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=(n-1)^2$.

2. لنثبت صحة التخمين بالتراجع.

نسمي $p(n)$ الخاصية: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=(n-1)^2$.

* لدينا: $u_1=0$ و منه $u_1=(1-1)^2$ و بالتالي فإن $p(0)$ صحيحة.

* نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ أي: $u_n=(n-1)^2$.

* لنرهن صحة $p(n+1)$ أي: $u_{n+1}=n^2$.

لدينا: $u_{n+1}=u_n+2n-1$ و بما أن $u_n=(n-1)^2$ فإن $u_{n+1}=(n-1)^2+2n-1$.

أي $u_{n+1}=n^2+2n+1+2n-1$ و منه $u_{n+1}=n^2$.

نستنتج هكذا أن $p(n+1)$ صحيحة.

نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

3. $u_{2008}=2007^2$ و $u_{1429}=1428^2$.

الفهرس

الديـوان الوطنـي للمطبوعـات المدرسيـة